



Votorantim

# Considerações sobre o Módulo de Elasticidade do Concreto



**Paulo Helene**

*Diretor PhD Engenharia*

*Conselheiro Permanente IBRACON*

*Prof. Titular Universidade de São Paulo*

*Presidente de honra ALCONPAT Internacional*

*Member fib (CEB-FIP) Service Life Design of Concrete Structures*

Engemix Jaguaré

11 de Novembro de 2015

São Paulo/SP

1

## Definições

### **ABNT NBR 6118:2007 item 8.1:**

$E_{ci}$  → módulo de elasticidade ou módulo de deformação tangente inicial do concreto, referindo-se sempre ao módulo cordal a 30%  $f_c$ ;

$E_{cs}$  → módulo de elasticidade secante do concreto, também denominado módulo de deformação secante do concreto;

$E_{ci}(t_0)$  → módulo de elasticidade ou módulo de deformação inicial do concreto no instante  $t_0$ ;

$E_{ci28}$  → módulo de elasticidade ou módulo de deformação inicial do concreto aos 28 dias.

### **ABNT NBR 6118:2014 item 8.2.8:**

O módulo de elasticidade ( $E_{ci}$ ) deve ser obtido segundo o método de ensaio estabelecido na ABNT NBR 8522, sendo considerado nesta norma o módulo de deformação tangente inicial, obtido aos 28 dias de idade;

O módulo de deformação secante pode ser obtido segundo método de ensaio estabelecido na ABNT NBR 8522, ou estimado pela expressão:

$$E_{cs} = E_{ci} * (0,8 + 0,2 * f_{ck}/80) \leq 1,0;$$

$E_{ci}(t_0)$  → módulo de elasticidade ou módulo de deformação inicial do concreto no instante  $t_0$ ;

$E_{ci28}$  → módulo de elasticidade ou módulo de deformação inicial do concreto aos 28 dias.

2

## Definições

### EUROCODE 2 item 1.6:

- $E_c$  → tangent modulus of elasticity of normal weight concrete at a stress of  $\sigma_c = 0$ ;
- $E_{c,eff}$  → effective modulus of elasticity of concrete (item 7.4.3);
- $E_{cd}$  → design value of modulus of elasticity of concrete;
- $E_{cm}$  → secant modulus of elasticity of concrete between  $\sigma_c = 0$  and  $0,4f_{cm}$ ;
- $E_c(t)$  → tangent modulus of elasticity of normal weight concrete at a stress of  $\sigma_c = 0$  and at time  $t$ .

### fib Model Code 2010 – Notations:

- $E_c$  → modulus of elasticity for concrete;
- $E_{ci}(t_0)$  → tangent modulus of elasticity of concrete at the time of loading  $t_0$ ;
- $E_{ci}$  → tangent modulus of elasticity of concrete at an age of 28 days;
- $E_{ci}(t)$  → modulus of elasticity of concrete at an age  $t \neq 28$  days;
- $E_{c,1}$  → secant modulus from the origin to the peak compressive stress (Table 5.1-8);
- $E_{c,imp}$  → modulus of elasticity of concrete for impact loading (item 5.1.11.2.4).

### ACI 318-14 item 2.2:

- $E_c$  → modulus of elasticity of concrete;
- $E_{cb}$  → modulus of elasticity of beam concrete;
- $E_{cs}$  → modulus of elasticity of slab concrete.

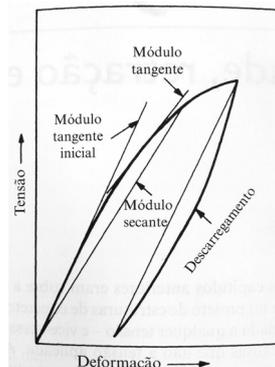
3

## Definições

NEVILLE, A. M. *Propriedades do concreto. Porto Alegre: Bookman, 2016. 888p.*

**Módulo de elasticidade tangente inicial:** parte reta da curva na tensão-deformação ou, quando não houver um trecho reto, à tangente da curva na origem → importância prática limitada.

**Módulo secante:** a deformação que ocorre durante o carregamento é considerada elástica, e o subsequente aumento da deformação é atribuído à fluência.



4

## Fatores intervenientes

### A. Diretos

1. Relação água/cimento: (*inverso*)
2. Natureza do agregado: (*direto*)  
Basalto, diabásio, granito, gnaisse, calcário, arenito, meta-sedimento
3. Teor de argamassa seca: (*inverso*)  
 $(1+a)/(1+m)$
4. Fração pasta: (*inverso*)  
 $(1+a/c)/(1+m+a/c)$
5. Fração agregado: (*direto*)  
 $(1+a+p)/(1+m)$
6. Adições: (*inverso*)
7. Umidade do corpo de prova (*inverso*)
8. Teor de ar incorporado ou aprisionado: (*inverso*)

### Indiretos:

1. Resistência à compressão (*direto*)
2. Consistência (slump) (*inverso*)

5

## Como ensaiar?

### Ensaio Estático

#### **ABNT NBR 8522:2008 (Em revisão)**

Item 3.5 Módulo de deformação secante ( $E_{cs}$ ): Propriedade do concreto cujo valor numérico é o coeficiente angular da reta secante ao diagrama tensão-deformação específica, passando pelos pontos A e B correspondentes, respectivamente, à tensão  $\sigma_a$  e à tensão considerada no ensaio;

Item 3.6 Módulo de elasticidade ou módulo de deformação tangente inicial ( $E_c$ ): módulo de elasticidade ou módulo de deformação tangente à origem ou inicial, que é considerado **equivalente** ao módulo de deformação **secante** ou cordal entre  $\sigma_a$  e  $30\%f_c$ , para o carregamento estabelecido neste método de ensaio;

6

# Como ensaiar?

## Ensaio Estático

**ABNT NBR 8522:2008 (Em revisão)**

- Módulo de elasticidade tangente inicial,  $E_{ci}$ , a 0,3 de  $f_c$ , com escorvação prévia do corpo de prova.
- Módulo de elasticidade a uma deformação solicitada. Anexo A: determinação do módulo secante a qualquer tensão especificada entre  $0,2*f_c$  e  $0,8*f_c$ , sem escorvação.

7

# Como ensaiar?



**ABNT NBR 8522:2008 (Em revisão)**

8

## **Variações dentro ensaio NBR 8522**

*Item 8.1 - Repetitividade no laboratório:*

Dispersão máxima de 5%, entre dois resultados;

*Item 8.2 - Reprodutibilidade entre laboratórios:*

Dispersão máxima 10%, entre dois resultados.

## **Variações interlaboratoriais**

Dados do Interlaboratorial do INMETRO mostram desvios padrões até 8,6GPa e coeficientes de variação de 23%.

## **Tolerâncias da especificação - NBR 6118**

Não prevê tolerâncias nos resultados para aceitação.

Resultado do ensaio  $\geq$  Especificado pelo projetista

9

## **Outras formas de determinar**

### **Métodos dinâmicos:**

#### **Velocidade de propagação ultrassônica → ASTM C597-09**

Este método de ensaio é utilizado para avaliar a uniformidade, a qualidade relativa do concreto e indicar a presença de vazios.

A resultado de módulo de elasticidade é obtido de forma indireta.

#### **Estímulo por impulso → ASTM E1876-09**

O método de determinação do módulo dinâmico pelo estímulo por impulso consiste em obter as frequências naturais de vibração do concreto a partir da resposta acústica provocada pelo impacto de um pulsador no corpo de prova e, com base na sua massa e dimensões, é calculado o módulo de elasticidade dinâmico do concreto.

10

# Tomada da velocidade de propagação ultrassônica

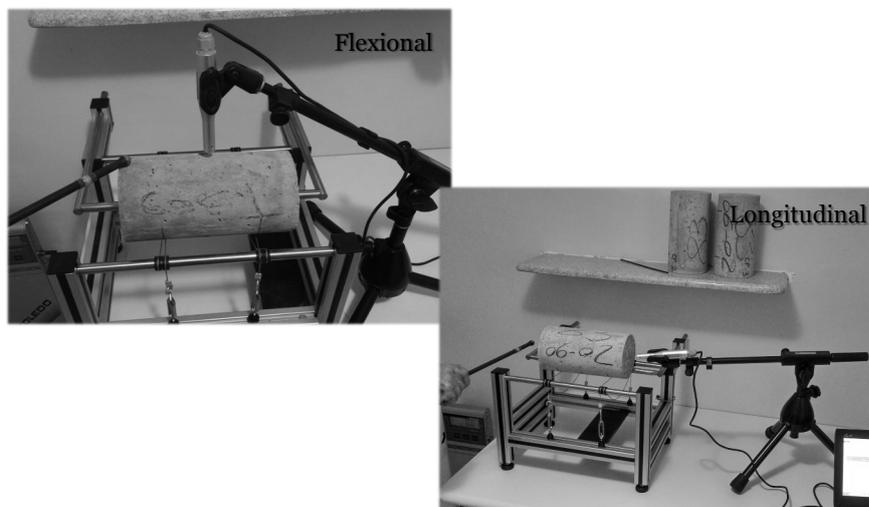
Bancada de ensaios PhD



11

# Estímulo por impulso

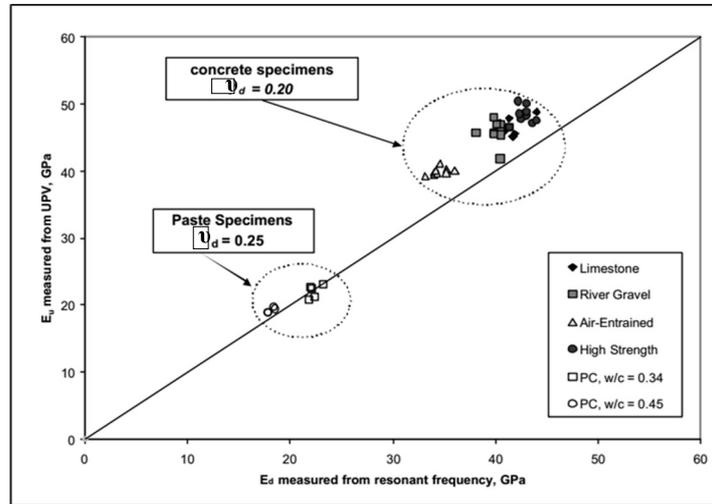
Bancada de ensaios PhD



12

## Dados bibliográficos

Comparação entre os valores do módulo de elasticidade obtidos pelo ensaio de estímulo por impulso (modo longitudinal) e pelo ensaio de ultrassom em testes realizados em corpos de prova de concreto e pastas de cimento



Popovics (2008)

13

## Dados bibliográficos

Relação entre o módulo dinâmico e estático

Resistência à compressão	Mehta & Monteiro: 2014	Almeida: 2008	
	Ensaio dinâmico em geral	Estímulo por impulso	
		Flexional	Longitudinal
Baixa $\leq 20$ MPa	1,40	1,28	1,34
Média $20 < f_{ck} < 40$ MPa	1,30	1,21	1,27
Alta $\geq 40$ MPa	1,20	1,06	1,08

14

## Dados bibliográficos

NEVILLE, A. M. *Propriedades do concreto. Porto Alegre: Bookman, 2016. 888p.:*

Relação entre o módulo dinâmico e estático

Resistência à compressão	$E_c$ [GPa]	$E_d$ [GPa]		
		Mehta & Monteiro	BS CP 110	Lydon & Balendran
20MPa	25,0	35,1	35,2	30,2
35MPa	33,1	43,1	41,7	39,9
50MPa	39,6	47,5	46,9	47,7

15

## Dados bibliográficos

NEVILLE, A. M. *Propriedades do concreto. Porto Alegre: Bookman, 2016. 888p.:*

Relação entre módulo estático e dinâmico:

- $E_c = 0,83 * E_d$  (Lydon & Balendran, 1986)
- $E_c = 1,25 * E_d - 19$  (BS CP 110, 1972) → Não se aplica a concretos com mais de 500kg de cimento por  $m^3$  ou com agregados leves
- $E_c = 1,04 * E_d - 4,1$  (BS CP 110, 1972) → Compreende os casos anteriores
- $E_c = k * E_d^{1,4} * \rho^{-1}$  (Popovics, 1975) →  $\rho$  é a massa específica do concreto e  $k$  é uma constante que depende das unidades de medida.

16

## Dados bibliográficos

HELENE, Paulo. Estudo da variação do módulo de elasticidade do concreto com a composição e características do concreto fresco e endurecido. São Paulo, USP. EP. PCC, 1998.

[www.phd.eng.br/wp-content/uploads/2015/11/Relat%C3%B3rio.pdf](http://www.phd.eng.br/wp-content/uploads/2015/11/Relat%C3%B3rio.pdf)

- Estudo das variáveis que interferem no resultado do módulo de elasticidade:
  - diferentes relações água/cimento;
  - diferentes consistências do concreto fresco;
  - diferentes volumes de pasta por metro cúbico de concreto;
  - diferentes resistências à compressão; e
  - diferentes idades.

17

## Dados bibliográficos

Tabela 1. Módulos típicos de elasticidade de pastas e rochas.

material	módulo de elasticidade, em GPa
gabro	130
basalto e diabásio	65
quartzito	55
granito e gnaisse	35
arenito	12
pasta a/c = 0,25	24
pasta a/c = 0,38	19
pasta a/c = 0.48	16

Helene (1998)

18

## Dados bibliográficos

- Consistências → (50±5)mm; (100±10)mm; (200±25)mm
- Traço em massa seca → 1:3, 1:4, 1:5, 1:6, 1:7
- Idades → 3d, 7d, 28d, 63d, 91d, 182d, 364d
- Agregados: Quartzo e granito
- Cimento CP II E 32
- Sem aditivos

Helene (1998)

19

### Resultados para traços de consistência seca

descrição	traço 1:3	traço 1:4	traço 1:5	traço 1:6	traço 1:7
abatimento, em mm	50 ± 5	50 ± 5	50 ± 5	50 ± 5	50 ± 5
relação a/c, em kg/kg	0.338	0.423	0.514	0.617	0.700
$f_{c, 3d}$ , em MPa	46.2	27.1	18.1	15.0	6.9
$f_{c, 7d}$ , em MPa	53.7	36.3	22.1	18.8	10.8
$f_{c, 28d}$ , em MPa	62.1	48.0	36.1	26.0	17.0
$f_{c, 63d}$ , em MPa	64.0	52.1	40.0	27.8	17.5
$f_{c, 91d}$ , em MPa	67.0	54.5	41.9	28.8	18.6
$f_{c, 182d}$ , em MPa	67.8	56.5	45.0	29.7	19.5
$f_{c, 364d}$ , em MPa	68.4	58.3	46.5	30.9	20.4
$E_{ci, 3d}$ , em GPa	40.4	31.6	30.7	27.4	21.8
$E_{ci, 7d}$ , em GPa	42.5	37.3	30.6	30.9	24.9
$E_{ci, 28d}$ , em GPa	40.5	39.0	34.8	30.6	23.0
$E_{ci, 63d}$ , em GPa	42.7	39.6	35.4	34.7	27.7
$E_{ci, 91d}$ , em GPa	45.7	42.1	38.5	33.8	33.1
$E_{ci, 182d}$ , em GPa	45.9	43.2	39.3	34.8	30.3
$E_{ci, 364d}$ , em GPa	46.1	43.7	41.0	34.8	31.6
$E_c, 3d$ , em GPa	35.6	30.6	28.7	25.6	20.4
$E_c, 7d$ , em GPa	39.7	34.9	28.5	28.9	22.2
$E_c, 28d$ , em GPa	39.9	36.1	32.2	27.9	21.7
$E_c, 63d$ , em GPa	41.2	37.1	34.2	30.2	21.6
$E_c, 91d$ , em GPa	43.8	38.2	34.9	31.1	29.9
$E_c, 182d$ , em GPa	43.0	40.4	38.4	32.6	28.4
$E_c, 364d$ , em GPa	43.1	40.8	38.4	33.1	29.8

Helene (1998)

20

### Resultados para traços de consistência seca

descrição	traço 1:3	traço 1:4	traço 1:5	traço 1:6	traço 1:7
abatimento, em mm	50 ± 5	50 ± 5	50 ± 5	50 ± 5	50 ± 5
relação a/c, em kg/kg	0.338	0.423	0.514	0.617	0.700
f <sub>ci</sub> , 3d, em MPa	46.2	27.1	18.1	15.0	6.9
f <sub>ci</sub> , 7d, em MPa	53.7	36.3	23.1	18.8	10.8
f <sub>ci</sub> , 28d, em MPa	62.1	48.0	36.1	26.0	17.0
f <sub>ci</sub> , 63d, em MPa	64.0	52.1	40.0	27.8	17.9
f <sub>ci</sub> , 91d, em MPa	67.0	54.5	41.9	28.8	18.6
f <sub>ci</sub> , 182d, em MPa	67.8	56.5	45.0	29.7	19.5
f <sub>ci</sub> , 364d, em MPa	68.4	58.3	46.5	30.9	20.4
E <sub>ci</sub> , 3d, em GPa	40.4	31.6	30.7	27.4	21.8
E <sub>ci</sub> , 7d, em GPa	42.5	37.3	30.6	30.0	24.0
E <sub>ci</sub> , 28d, em GPa	40.5	39.0	34.8	30.6	23.0
E <sub>ci</sub> , 63d, em GPa	42.7	39.6	35.4	34.7	27.7
E <sub>ci</sub> , 91d, em GPa	45.7	42.1	38.5	33.8	33.1
E <sub>ci</sub> , 182d, em GPa	45.9	43.2	39.3	34.8	30.3
E <sub>ci</sub> , 364d, em GPa	46.1	43.7	41.0	34.8	31.6
E <sub>c</sub> , 3d, em GPa	35.6	30.6	28.7	25.6	20.4
E <sub>c</sub> , 7d, em GPa	39.7	34.9	28.5	26.9	22.2
E <sub>c</sub> , 28d, em GPa	39.9	36.1	32.2	27.9	21.7
E <sub>c</sub> , 63d, em GPa	41.2	37.1	34.2	30.2	21.6
E <sub>c</sub> , 91d, em GPa	43.8	38.2	34.9	31.1	29.9
E <sub>c</sub> , 182d, em GPa	43.0	40.4	38.4	32.6	28.4
E <sub>c</sub> , 364d, em GPa	43.1	40.8	38.4	33.1	29.8

Helene (1998)

21

### Resultados para traços de consistência plástica

descrição	traço 1:3	traço 1:4	traço 1:5	traço 1:6	traço 1:7
abatimento, em mm	100 ± 10	100 ± 10	100 ± 10	100 ± 10	100 ± 10
relação a/c, em kg/kg	0.382	0.475	0.574	0.677	0.791
f <sub>ci</sub> , 3d, em MPa	34.8	20.2	12.9	8.8	6.1
f <sub>ci</sub> , 7d, em MPa	40.9	30.8	20.9	12.3	9.5
f <sub>ci</sub> , 28d, em MPa	51.4	41.1	33.4	18.8	14.4
f <sub>ci</sub> , 63d, em MPa	55.3	46.0	38.0	22.7	16.1
f <sub>ci</sub> , 91d, em MPa	61.1	50.1	41.4	24.6	17.5
f <sub>ci</sub> , 182d, em MPa	62.9	52.7	43.9	26.9	18.4
f <sub>ci</sub> , 364d, em MPa	65.6	55.3	46.3	28.8	20.3
E <sub>ci</sub> , 3d, em GPa	33.7	29.1	24.2	21.3	18.8
E <sub>ci</sub> , 7d, em GPa	34.5	32.3	28.4	23.8	21.8
E <sub>ci</sub> , 28d, em GPa	31.3	35.6	32.3	20.5	22.4
E <sub>ci</sub> , 63d, em GPa	35.2	37.0	36.6	30.3	26.0
E <sub>ci</sub> , 91d, em GPa	37.6	38.0	34.3	32.0	26.8
E <sub>ci</sub> , 182d, em GPa	39.7	38.7	36.4	30.9	29.2
E <sub>ci</sub> , 364d, em GPa	41.0	37.3	37.0	31.6	28.5
E <sub>c</sub> , 3d, em GPa	31.5	26.3	20.6	19.9	15.6
E <sub>c</sub> , 7d, em GPa	33.3	30.3	29.0	22.3	19.0
E <sub>c</sub> , 28d, em GPa	31.9	33.3	26.6	22.3	19.4
E <sub>c</sub> , 63d, em GPa	35.7	34.6	31.9	27.7	24.5
E <sub>c</sub> , 91d, em GPa	36.2	33.0	32.8	28.1	25.1
E <sub>c</sub> , 182d, em GPa	38.4	36.2	34.1	28.9	25.0
E <sub>c</sub> , 364d, em GPa	38.9	36.8	34.2	28.6	25.9

Helene (1998)

22

### Resultados para traços de consistência plástica

descrição	traço 1:3	traço 1:4	traço 1:5	traço 1:6	traço 1:7
abatimento, em mm	100 ± 10	100 ± 10	100 ± 10	100 ± 10	100 ± 10
relação a/c, em kg/kg	0.382	0.475	0.574	0.677	0.791
f <sub>c</sub> , 3d, em MPa	34.8	20.2	12.9	8.8	6.1
f <sub>c</sub> , 7d, em MPa	40.9	30.8	20.9	12.3	9.5
f <sub>c</sub> , 28d, em MPa	51.4	41.1	33.4	18.8	14.4
f <sub>c</sub> , 63d, em MPa	55.3	46.0	38.0	22.7	16.1
f <sub>c</sub> , 91d, em MPa	61.1	50.1	41.4	24.6	17.5
f <sub>c</sub> , 182d, em MPa	62.9	52.7	43.9	26.9	18.4
f <sub>c</sub> , 364d, em MPa	65.6	55.3	46.3	28.8	20.3
E <sub>ci</sub> , 3d, em GPa	33.7	29.1	24.2	21.3	18.8
E <sub>ci</sub> , 7d, em GPa	34.5	32.3	28.4	23.8	21.8
E <sub>ci</sub> , 28d, em GPa	31.3	35.6	32.3	20.5	22.4
E <sub>ci</sub> , 63d, em GPa	35.2	37.0	36.6	30.3	26.0
E <sub>ci</sub> , 91d, em GPa	37.6	38.0	34.3	32.0	26.8
E <sub>ci</sub> , 182d, em GPa	39.7	38.7	36.4	30.9	29.2
E <sub>ci</sub> , 364d, em GPa	41.0	37.3	37.0	31.6	28.5
E <sub>c</sub> , 3d, em GPa	31.5	26.3	20.6	19.9	15.6
E <sub>c</sub> , 7d, em GPa	33.3	30.3	29.0	22.3	19.0
E <sub>c</sub> , 28d, em GPa	31.9	33.3	26.6	22.3	19.4
E <sub>c</sub> , 63d, em GPa	35.7	34.6	31.9	27.7	24.5
E <sub>c</sub> , 91d, em GPa	36.2	33.0	32.8	28.1	25.1
E <sub>c</sub> , 182d, em GPa	38.4	36.2	34.1	28.9	25.0
E <sub>c</sub> , 364d, em GPa	38.9	36.8	34.2	28.6	25.9

Helene (1998)

23

### Resultados para traços de consistência fluida

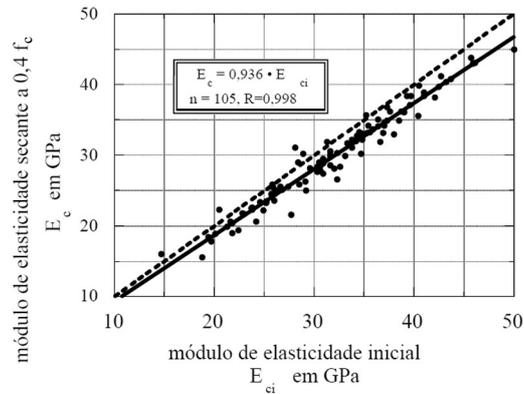
descrição	traço 1:3	traço 1:4	traço 1:5	traço 1:6	traço 1:7
abatimento, em mm	200 ± 25	200 ± 25	200 ± 25	200 ± 25	200 ± 25
relação a/c, em kg/kg	0.400	0.506	0.606	0.717	0.824
f <sub>c</sub> , 3d, em MPa	30.9	20.4	13.1	8.8	5.5
f <sub>c</sub> , 7d, em MPa	36.3	29.9	19.6	11.7	8.4
f <sub>c</sub> , 28d, em MPa	46.5	37.2	27.7	18.0	13.8
f <sub>c</sub> , 63d, em MPa	50.9	40.0	33.5	20.4	15.2
f <sub>c</sub> , 91d, em MPa	53.0	42.5	34.0	20.9	17.2
f <sub>c</sub> , 182d, em MPa	55.7	44.6	34.1	22.1	18.6
f <sub>c</sub> , 364d, em MPa	57.7	46.2	36.8	23.1	20.0
E <sub>ci</sub> , 3d, em GPa	26.6	26.1	20.1	19.7	14.7
E <sub>ci</sub> , 7d, em GPa	31.6	29.6	25.7	21.6	19.4
E <sub>ci</sub> , 28d, em GPa	34.3	32.6	26.0	23.8	22.8
E <sub>ci</sub> , 63d, em GPa	35.9	28.1	30.5	26.2	23.7
E <sub>ci</sub> , 91d, em GPa	35.3	33.3	30.9	26.1	24.6
E <sub>ci</sub> , 182d, em GPa	36.9	33.8	30.9	25.9	25.2
E <sub>ci</sub> , 364d, em GPa	36.4	34.2	28.9	25.8	25.2
E <sub>c</sub> , 3d, em GPa	25.6	24.8	18.9	17.8	16.0
E <sub>c</sub> , 7d, em GPa	30.1	28.2	24.5	20.6	18.4
E <sub>c</sub> , 28d, em GPa	32.7	28.4	23.6	22.6	21.8
E <sub>c</sub> , 63d, em GPa	33.7	31.1	29.0	25.0	22.5
E <sub>c</sub> , 91d, em GPa	33.2	31.7	27.4	24.8	23.4
E <sub>c</sub> , 182d, em GPa	33.2	32.2	29.5	25.5	23.5
E <sub>c</sub> , 364d, em GPa	35.1	32.0	30.2	25.9	23.3

Helene (1998)

24

## Dados bibliográficos

Correspondência entre o módulo de elasticidade a  $0,4f_c$ ,  $E_c$ , com o módulo de elasticidade inicial  $E_{ci}$

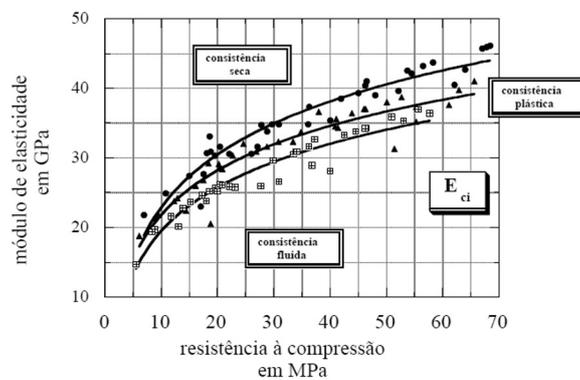


Helene (1998)

25

## Dados bibliográficos

Correspondência entre o módulo de elasticidade inicial,  $E_{ci}$ , com a resistência à compressão dos concretos, com idades variando de 3d a 1ano

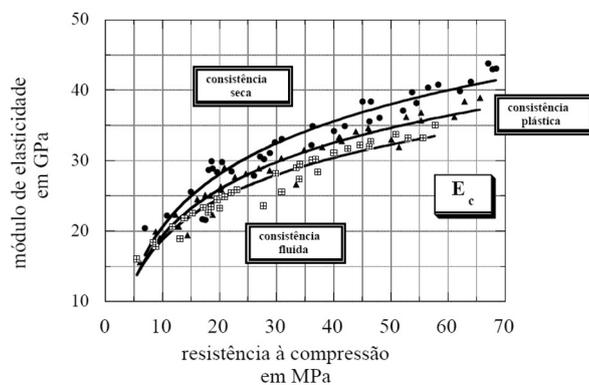


Helene (1998)

26

## Dados bibliográficos

Correspondência entre o módulo de elasticidade secante a  $0,4f_c$ ,  $E_c$ , com a resistência à compressão dos concretos, com idades variando de 3d a 1ano



Helene (1998)

27

## Dados bibliográficos

Proposta de índices de correção do módulo básico

natureza do agregado graúdo	1	consistência do concreto fresco	2
basalto e diabásio	1,1	fluida	0,9
granito e gnaisse	1,0	plástica	1,0
calcário, arenito e metasedimento	0,9	seca	1,1

Helene (1998)

28

## Dados bibliográficos

Bilesky, Pedro C. Contribuição aos estudos do módulo de elasticidade do concreto – Dissertação de mestrado em elaboração

- Estudo do módulo de elasticidade pelos métodos estáticos (ABNT NBR 8522) e dinâmicos (Ultrassom e Impulso por vibração);
- Correlação entre os dois métodos;
- Verificação da influência da origem petrográfica dos agregados e da composição do concreto:
  - 3 tipos distintos de agregados: Granito, Calcário e Basalto;
  - 5 relações a/c: 0,90, 0,60, 0,55, 0,45 e 0,30



29

## Como estimar? (sem ensaio)

NORMA	MÓDULO TANGENTE	MÓDULO SECANTE
ABNT NBR 6118:2007	$E_{ci} = 5600 * \sqrt{f_{ck}}$	$E_{cs} = 0,85 * E_{ci}$
ABNT NBR 6118:2014*	$E_{ci} = \alpha_E * 5600 * \sqrt{f_{ck}}$ para $f_{ck}$ de 20MPa a 50MPa $E_{ci} = 21,5 * 10^3 * \alpha_E * \left(\frac{f_{ck} + 1,25}{10}\right)^{1/3}$ para $f_{ck}$ de 55MPa a 90MPa	$E_{cs} = \alpha_i * E_{ci}$ $E_{cs} = \left[0,8 + 0,2 * \left(\frac{f_{ck}}{80}\right)\right] * E_{ci}$
<i>fib</i> MODEL CODE 2010*	$E_{ci} = 21,5 * 10^3 * \alpha_E * \left(\frac{f_{ck} + 8}{10}\right)^{1/3}$ $E_{ci}(t) = \left(e^{\left\{s * \left[1 - \left(\frac{28}{t}\right)^{0,5}\right]\right\}}\right)^{0,5} * E_{ci}$	$E_c = \alpha_i * E_{ci}$ $E_c = \left[0,8 + 0,2 * \left(\frac{f_{cm}}{88}\right)\right] * E_{ci}$

\*  $\alpha_E = 1,2$  para basalto e diabásio;  $1,0$  para granito e gnaíse;  $0,9$  para calcário e  $0,7$  para arenito.

30

## Como estimar? (sem ensaio)

NORMA	MÓDULO TANGENTE	MÓDULO SECANTE
ABNT NBR 6118:2007	$E_{ci} = 5600 * \sqrt{f_{ck}}$	$E_{cs} = 0,85 * E_{ci}$
ABNT NBR 6118:2014*	$E_{ci} = \alpha_E * 5600 * \sqrt{f_{ck}}$ para $f_{ck}$ de 20MPa a 50MPa $E_{ci} = 21,5 * 10^3 * \alpha_E * \left(\frac{f_{ck}}{10} + 1,25\right)^{1/3}$ para $f_{ck}$ de 55MPa a 90MPa	$E_{cs} = \alpha_i * E_{ci}$ $E_{cs} = \left[0,8 + 0,2 * \left(\frac{f_{ck}}{80}\right)\right] * E_{ci}$
ACI 318 -14**	-	$E_c = 0,043 * \omega_c^{1,5} * f_c'^{1/2}$ (MPa) para $\omega_c$ entre 1440 e 2560 kg/m <sup>3</sup> $E_c = 4732 * f_c'^{1/2}$ (MPa) para concreto de massa específica normal
EUROCODE 2	$E_c = 1,05 * E_{cm}$ $E_{c(t)} = 1,05 * \left( e^{\left\{ s * \left[ 1 - \left( \frac{28}{t} \right)^{0,5} \right] \right\}} \right)^{0,3} * E_{cm}$	$E_{cm} = 22 * \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{0,3}$ ( $f_{cm}$ em MPa) $E_{cd} = E_{cm}/1,2$

\*  $\alpha_E = 1,2$  para basalto e diabásio;  $1,0$  para granito e gnaíse;  $0,9$  para calcário e  $0,7$  para arenito.  
\*\*o item R19.2.2.1 traz a definição de  $E_c$  como a inclinação da reta traçada a partir da origem até a tensão de compressão de  $0,45 * f_c'$  e que os valores de módulo de elasticidade obtidos através de ensaios podem variar de 80% a 120% dos valores previstos.

31

## Como estimar? (sem ensaio)

Empregando as expressões da ABNT NBR 6118:2014, pode-se considerar os valores arredondados da Tabela 8.1.

Tabela 8.1 - Valores estimados de módulo de elasticidade em função da resistência característica à compressão do concreto (considerando o uso de granito como agregado graúdo)

Classe de resistência	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	C60	C70	C80	C90
$E_{ci}$ (GPa)	25	28	31	33	35	38	40	42	43	45	47
$E_{cs}$ (GPa)	21	24	27	29	32	34	37	40	42	45	47
$\alpha_i$	0,85	0,86	0,88	0,89	0,90	0,91	0,93	0,95	0,98	1,00	1,00

32

## **Como controlar?**

De acordo com Montija (2007), as variabilidades dentro do ensaio estático, aferidas em programas interlaboratoriais nacionais, podem promover desvios padrões da ordem de 3,5GPa.

Dados atualizados destes mesmos interlaboratoriais, de acordo com os resultados apresentados por Bittencourt et al. (2014), mostram que estes desvios são de 5,8GPa a 6,3GPa, o que significa uma variabilidade expressa pelo coeficiente de variação da ordem de 10% a 15%, que é equivalente à variabilidade da resistência de um concreto na condição de preparo do grupo B (concreto produzido no canteiro segundo ABNT NBR 12655:2006).

Por desconhecimento dessa natural e elevada variabilidade dos resultados, também constatada pelo ACI 318 que recomenda tolerância de 0,8 a 1,2 do resultado previsto pelo modelo matemático, infelizmente tem havido discussões e desgastes desnecessários entre fornecedores, construtores e projetistas.

33

# **ASPECTOS CONTROVERSOS**

34

## Tensão de referência para a medida do módulo

Norma	Tangente	Secante
ABNT NBR 8522:2008	$0,3f_c$	
Eurocode 2		$0,4f_{cm}$
<i>fib</i> Model Code 2010	$0,4f_{cm}$	
ACI 318-14		$0,45f'_c$

- Tangente ou secante?

- 30%, 40% ou 45%?

35

## Comparação entre os modelos de previsão dos módulos de elasticidade

$f_{ek}$ [MPa]	Módulo [GPa]							
	ABNT NBR 6118:2014		<i>fib</i> Model Code 2010		ACI 318:2014	Eurocode:2004		
	tangente $E_{ci}$	secante $E_{cs}$	tangente $E_{ci}$	secante $E_{c,1}$	secante $E_c$	tangente $E_c$	secante $E_{cm}$	cálculo $E_{cd}$
<b>20</b>	25,0	21,3	30,3	26,2	21,2	31,5	30,0	25,0
<b>40</b>	35,4	31,9	36,3	33,0	29,9	37,0	35,2	29,4
<b>60</b>	41,6	39,5	40,7	38,9	36,7	41,1	39,1	32,6
<b>90</b>	46,7	46,7	46,0	46,0	44,9	45,8	43,6	36,4

36

ABNT NBR 6118:2014

item 8.2.10 Diagrama tensão-deformação idealizado

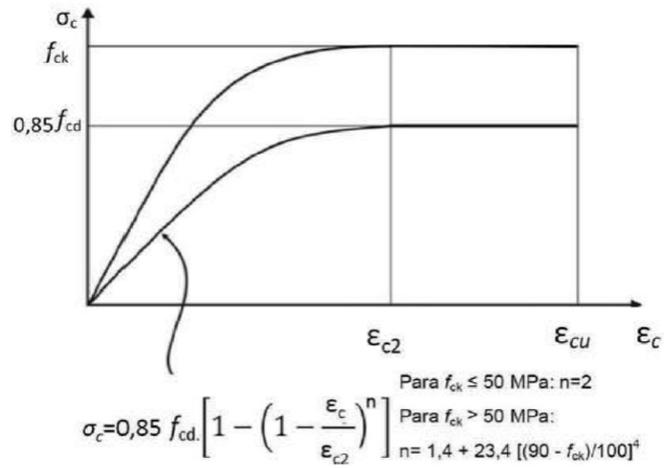


Figura 8.2 - Diagrama tensão-deformação idealizado

37

## Qual ponto adotar?

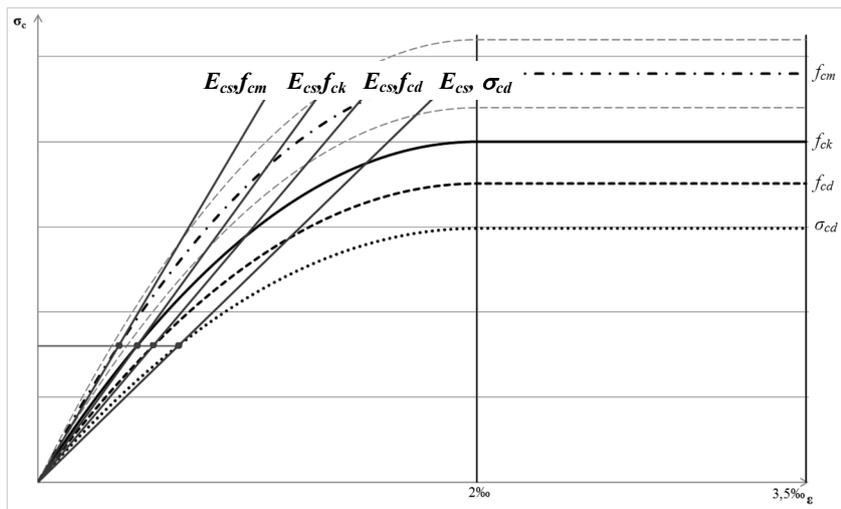
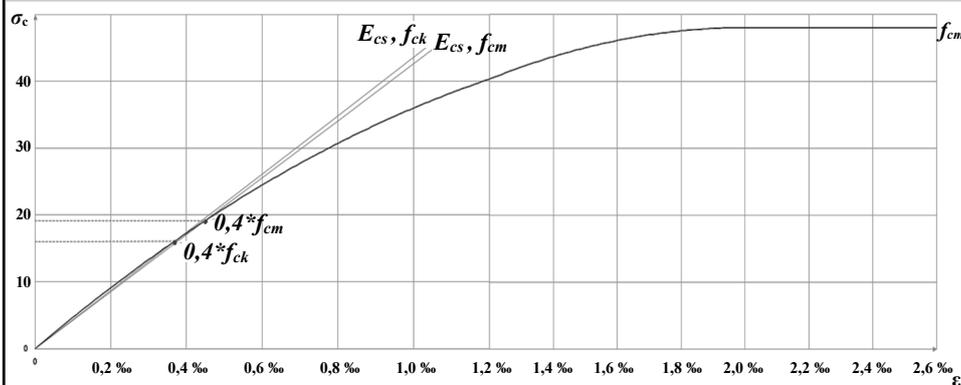


Diagrama tensão-deformação específica idealizado, adaptado da ABNT NBR 6118:2014, Figura 8.2

38

# Qual ponto adotar?

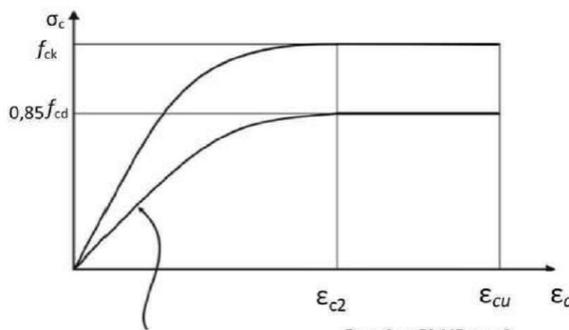


Determinação do módulo secante, segundo a ABNT NBR 6118:2014 e EUROCODE, para um concreto genérico de  $f_{ck}=40\text{MPa}$

39

## ABNT NBR 6118:2014

### item 8.2.10 Diagrama tensão-deformação idealizado



- Para concretos de classe até C50:

$$\epsilon_{c2} = 2,0\text{‰};$$

$$\epsilon_{cu} = 3,5\text{‰}$$

- Para concretos de classes C55 até C90:

$$\epsilon_{c2} = 2,0\text{‰} + 0,085\text{‰} \cdot (f_{ck} - 50)^{0,53};$$

$$\epsilon_{cu} = 2,6\text{‰} + 35\text{‰} \cdot [(90 - f_{ck})/100]^4;$$

$$\sigma_c = 0,85 f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right]$$

Para  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ :  $n=2$   
 Para  $f_{ck} > 50 \text{ MPa}$ :  $n = 1,4 + 23,4 \cdot [(90 - f_{ck})/100]^4$

Figura 8.2 - Diagrama tensão-deformação idealizado

**Somente para dimensionamento de seções transversais!!**

40

## Ao utilizar o comportamento idealizado...

Estimativa para o material  
ex:  $5600 \cdot \sqrt{f_{ck}}$

$f_{ck}=20\text{MPa}$ e $f_{cm}=26,6\text{MPa}$		$E_{cs}$ - Curva tensão-deformação (ABNT NBR 6118:2014)				$E_{cs}$ (ABNT NBR 6118:2014)
		$0,85 \cdot f_{cd}$	$f_{cd}$	$f_{ck}$	$f_{cm}$	
ponto adotado (MPa)	30%	11,1	13,1	18,4	24,4	21,0
	40%	10,8	12,7	17,8	23,6	
	45%	10,6	12,4	17,4	23,1	

$f_{ck}=50\text{MPa}$ e $f_{cm}=56,6\text{MPa}$		$E_{cs}$ - Curva tensão-deformação (ABNT NBR 6118:2014)				$E_{cs}$ (ABNT NBR 6118:2014)
		$0,85 \cdot f_{cd}$	$f_{cd}$	$f_{ck}$	$f_{cm}$	
ponto adotado (MPa)	30%	27,9	32,8	45,9	51,9	37,0
	40%	26,9	31,7	44,4	50,2	
	45%	26,4	31,1	43,5	49,2	

$f_{ck}=90\text{MPa}$ e $f_{cm}=96,6\text{MPa}$		$E_{cs}$ - Curva tensão-deformação (ABNT NBR 6118:2014)				$E_{cs}$ (ABNT NBR 6118:2014)
		$0,85 \cdot f_{cd}$	$f_{cd}$	$f_{ck}$	$f_{cm}$	
ponto adotado (MPa)	30%	28,0	33,0	46,1	49,5	47,0
	40%	27,7	32,4	45,3	48,6	
	45%	27,2	32,0	44,8	48,1	

41

## CEB *fib* Model Code 2010

### item 5.1.8 Stress-strain relations for **short term loading**

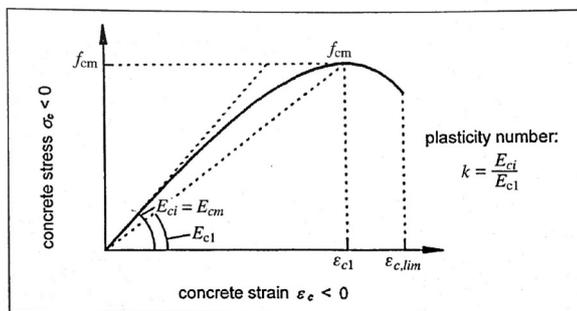


Figure 5.1-3: Schematic representation of the stress-strain relation for short term loading in uniaxial compression (according to *fib* Bulletin 42)

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \left( \frac{k \cdot \eta \cdot \eta^2}{1 - (k-2) \cdot \eta} \right)$$

sendo:

$$\eta = \epsilon_c / \epsilon_{c1}$$

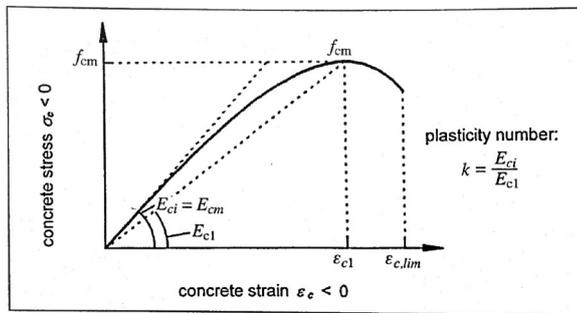
$$k = E_{ci} / E_{c1}$$

- Utiliza o  $f_{cm}$  (deformação média de todos os pontos do material)
- Curva que se aproxima do comportamento real do material

42

## CEB *fib* Model Code 2010

### item 5.1.8 Stress-strain relations for **short term loading**



- Para concretos de classes C12 até C120.

$\epsilon_{c1}$ : deformação até a resistência de pico ( $f_{cm}$ ) – 1,9‰ até 3,0‰;

$\epsilon_{c,lim}$  = deformação última – 3,5‰ até 3,0‰;

$E_{ci}$ : Módulo de elasticidade tangente à origem;

$E_{c1}$ : Módulo de elasticidade da origem até  $f_{cm}$ ;

Figure 5.1-3: Schematic representation of the stress–strain relation for short term loading in uniaxial compression (according to *fib* Bulletin 42)

- Utiliza o  $f_{cm}$  (deformação média de todos os pontos do material)
- Curva que se aproxima do comportamento real do material

43

## Qual ponto adotar?

$f_{ck}=20\text{MPa}$ e $f_{cm}=28\text{MPa}$		$E_c$ - Curva tensão-deformação (CEB <i>fib</i> Model Code 2010)		$E_c$ (CEB <i>fib</i> Model Code 2010)
		$f_{ck}$	$f_{cm}$	
ponto adotado (MPa)	30%	28,3	27,5	26,2
	40%	27,5	26,4	
	45%	27,0	25,9	
$f_{ck}=50\text{MPa}$ e $f_{cm}=58\text{MPa}$		$E_c$ - Curva tensão-deformação (CEB <i>fib</i> Model Code 2010)		$E_c$ (CEB <i>fib</i> Model Code 2010)
		$f_{ck}$	$f_{cm}$	
ponto adotado (MPa)	30%	35,4	35,2	36,0
	40%	34,7	34,4	
	45%	34,4	34,0	
$f_{ck}=90\text{MPa}$ e $f_{cm}=98\text{MPa}$		$E_c$ - Curva tensão-deformação (CEB <i>fib</i> Model Code 2010)		$E_c$ (CEB <i>fib</i> Model Code 2010)
		$f_{ck}$	$f_{cm}$	
ponto adotado (MPa)	30%	44,9	44,8	46,0
	40%	44,5	44,4	
	45%	44,2	44,1	

$E_c$  – Módulo de Elasticidade Secante

Valores plotados na curva de  $f_{cm}$

44

# Onde influencia?

## Fluência

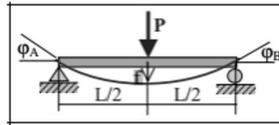
$$\varepsilon_c = \sigma_c(t_0) \left[ \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c28}} \right] + \varepsilon_{cs}(t, t_0) + \Delta\sigma_c(t, t_0) \left( \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c28}} \right)$$

## Parâmetro de instabilidade

$$\alpha = H_{tot} \sqrt{N_k / (E_{cs} I_c)}$$

## Flecha

Ex.: Viga bi-apoiada com carga concentrada

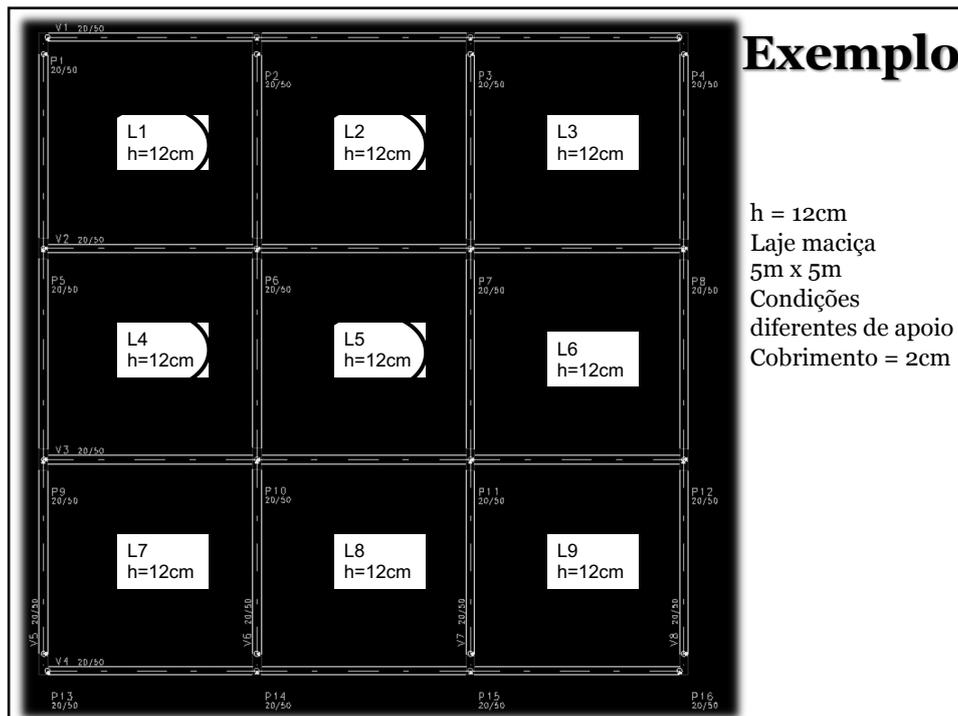


$$f = - \frac{PL^3}{48EI}$$

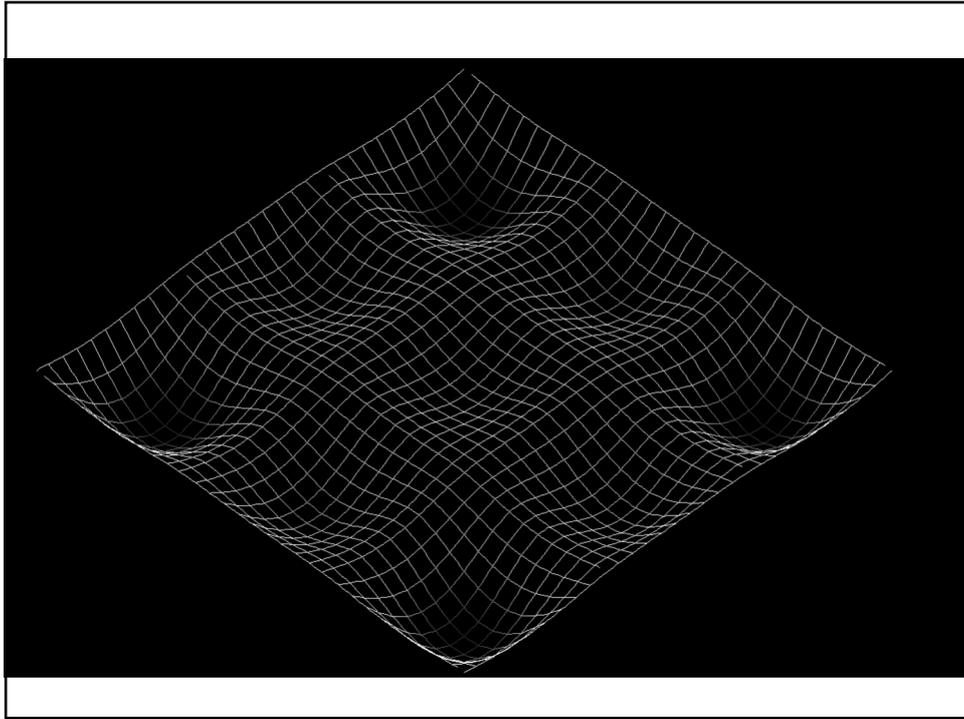
## Não linearidade física

- lajes:  $(E I)_{sec} = 0,3 E_{ci} I_c$
- vigas:  $(E I)_{sec} = 0,4 E_{ci} I_c$  para  $A_s' \neq A_s$  e  
 $(E I)_{sec} = 0,5 E_{ci} I_c$  para  $A_s' = A_s$
- pilares:  $(E I)_{sec} = 0,8 E_{ci} I_c$

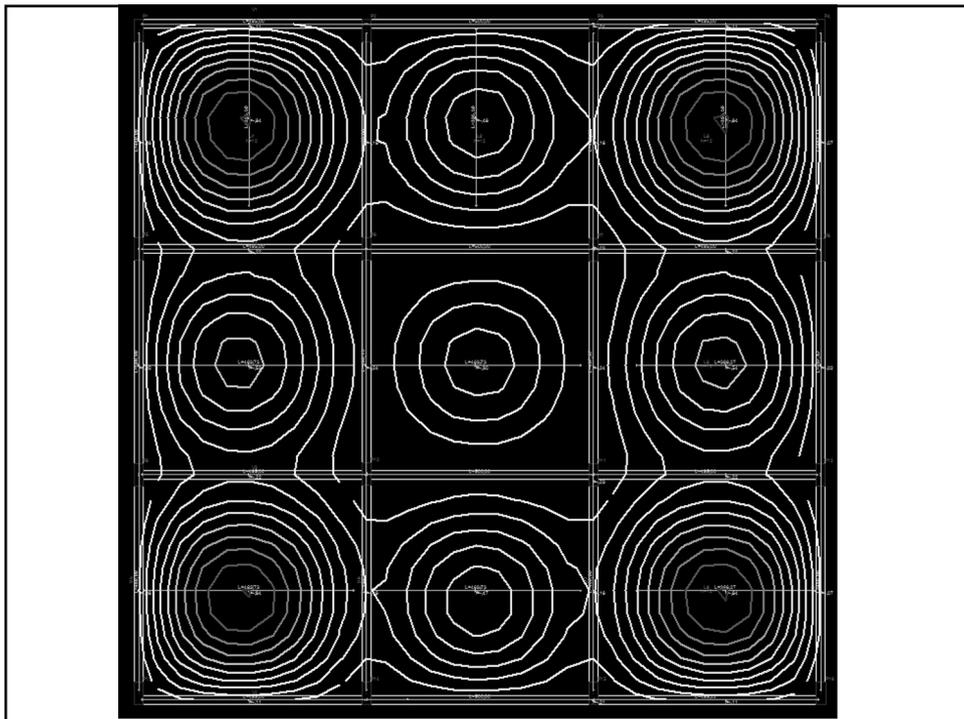
45



46



47



48

## Quanto influencia? $f_{ck} = 20\text{MPa}$

C20	Imediata (cm)				Diferida (cm)			
	L1	L2	L4	L5	L1	L2	L4	L5
-20%	-0,58	-0,29	-0,35	-0,17	-1,56	-1,19	-0,88	-0,26
-10%	-0,52	-0,26	-0,31	-0,15	-1,48	-1,13	-0,80	-0,22
0	-0,47	-0,23	-0,28	-0,14	-1,34	-1,07	-0,73	-0,18
Variação	<b>0,11</b>	<b>0,06</b>	<b>0,07</b>	<b>0,03</b>	<b>0,22</b>	<b>0,12</b>	<b>0,15</b>	<b>0,08</b>

$h = 12\text{cm} = \text{cte}$   
 $f_{ck} = \text{cte}$   
 Cobrimento = cte  
 $E_{cs} = \text{variável}$   
 Taxa armadura cte  
 $t_x = 0,15\%$   
 $t_y = 0,15\%$

49

## Quanto influencia? $f_{ck} = 35\text{MPa}$

C35	Imediata (cm)				Diferida (cm)			
	L1	L2	L4	L5	L1	L2	L4	L5
-20%	-0,44	-0,22	-0,26	-0,13	-0,94	-0,53	-0,60	-0,34
-10%	-0,39	-0,20	-0,24	-0,12	-0,84	-0,48	-0,53	-0,30
0	-0,35	-0,18	-0,21	-0,11	-0,76	-0,42	-0,50	-0,26
Variação	<b>0,09</b>	<b>0,04</b>	<b>0,05</b>	<b>0,02</b>	<b>0,18</b>	<b>0,11</b>	<b>0,10</b>	<b>0,08</b>

$h = \text{cte}$   
 $f_{ck} = \text{cte}$   
 Cobrimento = cte  
 $E_{cs} = \text{variável}$   
 Taxa armadura cte  
 $t_x = 0,17\%$   
 $t_y = 0,20\%$

50

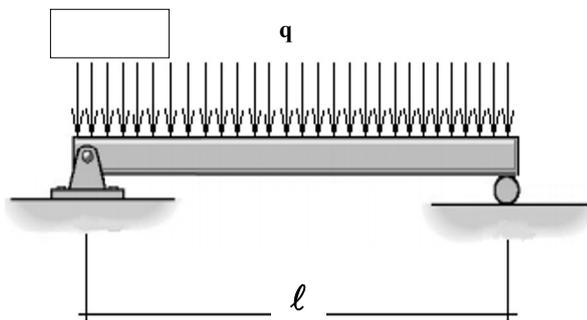
## Quanto influencia? $f_{ck} = 50\text{MPa}$

C50	Imediata (cm)				Diferida (cm)			
	L1	L2	L4	L5	L1	L2	L4	L5
-20%	-0,37	-0,18	-0,22	-0,11	-0,79	-0,45	-0,50	-0,28
-10%	-0,33	-0,16	-0,20	-0,10	-0,70	-0,40	-0,45	-0,25
0	-0,30	-0,15	-0,18	-0,09	-0,63	-0,36	-0,41	-0,23
Variação	<b>0,07</b>	<b>0,03</b>	<b>0,04</b>	<b>0,03</b>	<b>0,16</b>	<b>0,09</b>	<b>0,09</b>	<b>0,05</b>

$h = \text{cte}$   
 $f_{ck} = \text{cte}$   
 Cobrimento = cte  
 $E_{cs} = \text{variável}$   
 Taxa armadura cte  
 $t_x = 0,21\%$   
 $t_y = 0,25\%$

51

## Exemplo



Viga bi-apoiada  
 $h = 56\text{cm}$   
 $d = 50\text{cm}$   
 $b = 20\text{cm}$   
 $l = 6\text{m}$   
 $q = 13,33\text{kN/m}$  (cte)  
 agregado granítico

$$f = -\frac{5ql^4}{384EI}$$

52

## Quanto influencia? $f_{ck} = 20\text{MPa}$

<b>C20</b>	<b>Imediata (cm)</b>	<b>Diferida (cm)</b>
-20%	-1,02	-2,32
-10%	-0,99	-2,26
0	-0,97	-2,21
Varição	0,05	0,11

ABNT NBR 6118:2014  
item 17.3.2.1.2

$h = \text{cte}$   
 $f_{ck} = \text{cte}$   
 $E_{cs} = \text{variável}$   
 Taxa armadura =  $7,5\text{cm}^2$  (cte)

53

## Quanto influencia? $f_{ck} = 35\text{MPa}$

<b>C35</b>	<b>Imediata (cm)</b>	<b>Diferida (cm)</b>
-20%	-1,13	-2,57
-10%	-1,08	-2,47
0	-1,05	-2,39
Varição	0,08	0,18

ABNT NBR 6118:2014  
item 17.3.2.1.2

$h = \text{cte}$   
 $f_{ck} = \text{cte}$   
 $E_{cs} = \text{variável}$   
 Taxa armadura =  $4,8\text{cm}^2$  (cte)

54

## Quanto influencia? $f_{ck} = 50\text{MPa}$

<b>C50</b>	<b>Imediata (cm)</b>	<b>Diferida (cm)</b>
-20%	-1,12	-2,56
-10%	-1,07	-2,44
0	-1,03	-2,34
Varição	0,09	0,22

ABNT NBR 6118:2014  
item 17.3.2.1.2

$h = \text{cte}$

$f_{ck} = \text{cte}$

$E_{cs} = \text{variável}$

Taxa armadura =  $4,0\text{cm}^2$  (cte)

55

## Bibliografia

HELENE, Paulo et al. Considerações sobre o Módulo de Elasticidade do Concreto. In: CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, 56., 2014, Natal. (download free [www.phd.eng.br/biblioteca-phd/publicacoes/em-congressos/](http://www.phd.eng.br/biblioteca-phd/publicacoes/em-congressos/))

MONTEIRO, Paulo J. M., HELENE, Paulo & KANG, S. Designing Concrete Mixtures for Strength, Elastic Modulus and Fracture Energy. Materials & Structures, v.26, p.443 - 452, 1993. (download free [www.phd.eng.br/biblioteca-phd/publicacoes/em-revistas/](http://www.phd.eng.br/biblioteca-phd/publicacoes/em-revistas/))

HELENE, Paulo. Estudo da variação do módulo de elasticidade do concreto com a composição e características do concreto fresco e endurecido. Departamento de Engenharia de Construção Civil da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo – PCC/ USP, 1998. (download free [www.phd.eng.br/wp-content/uploads/2015/11/Relat%C3%B3rio.pdf](http://www.phd.eng.br/wp-content/uploads/2015/11/Relat%C3%B3rio.pdf))

NEVILLE, A. M. Propriedades do concreto. Porto Alegre: Bookman, 2016. 888p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. ABNT NBR 6118. Projeto de estruturas de concreto. Procedimento. Rio de Janeiro, 2014. (consulta free na biblioteca da PhD)

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. ABNT NBR 8522. Determinação do módulo estático de elasticidade à compressão. Rio de Janeiro, 2008. (consulta free na biblioteca da PhD)

BITTENCOURT, R. M.; FARIAS, L. A.; INÁCIO, J. J.; MARQUES, R. A. Relatório do XIX Programa Interlaboratorial de Ensaio de Concreto/2013, Furnas Centrais Elétricas S.A., à Comissão Técnica de Laboratórios de Ensaio em Construção Civil do Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial (INMETRO-CTLE-01), Goiânia, 2014. (consulta free na biblioteca da PhD)

ALMEIDA, S. F.; HANAI, J. B. Análise dinâmica experimental da rigidez de elementos de concreto submetidos à danificação progressiva até a ruptura. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v.10, n. 44, p. 49-66, 2008.

POPOVICS, J. S. A Study of Static and Dynamic Modulus of Elasticity of Concrete. University of Illinois, Urbana, IL. ACI-CRC Final Report. 2008.

MONTIJA, F. C. Aspectos da variabilidade experimental do ensaio de módulo de deformação do concreto. 2007. 261 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia de Construção Civil e Urbana, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

56

# OBRIGADO!



*"do Laboratório de Pesquisa ao Canteiro de Obras"*

**[www.concretophd.com.br](http://www.concretophd.com.br)**  
**[www.phd.eng.br](http://www.phd.eng.br)**

**11-2501-4822 / 23**  
**11-9-5045-5562**