



Anais do  
62º Congresso Brasileiro do Concreto  
CBC2020  
Setembro / 2020



@ 2020 - IBRACON - ISSN 2175-8182

## **O desenvolvimento da resistência à compressão de concretos produzidos com cimentos nacionais à luz do modelo proposto pela norma europeia.**

*The development of the compressive strength of concrete produced with national cements according model proposed by european standard*

BONI, Ricardo (1); COUTO, Douglas (1); HELENE, Paulo (2).

(1) *PhD Engenharia.*

(2) *Professor Titular da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. PhD Engenharia. Rua Visconde de Ouro Preto, 201. Consolação. São Paulo/SP. CEP 01303-060*

### **Resumo**

O conhecimento da curva de crescimento da resistência à compressão do concreto em função da idade, em muitos casos, exerce um papel importante na execução de obras de construção civil. Serviços de cura, retirada de fôrmas, escoramentos, protensão da estrutura, bem como a liberação de outras etapas construtivas estão intimamente relacionados com o desenvolvimento e com o aumento da resistência desse material ao longo do tempo. Portanto, expressões teóricas que possibilitem estimar a resistência à compressão do concreto em uma determinada idade, fornecendo resultados confiáveis, auxiliam sobremaneira a dinâmica dos serviços, a tomada de decisões e o planejamento de obras de estruturas de concreto armado e protendido. Este artigo apresenta uma análise do desenvolvimento da resistência à compressão de alguns traços de concreto, tendo como base o modelo teórico proposto pela norma europeia. Foram determinados os coeficientes “s” dos traços reais estudados, através da linearização da expressão exponencial proposta pelo *fib* Model Code e por regressão linear pelo método dos mínimos quadrados aplicados aos resultados de resistência à compressão do concreto, obtidos em idades pré-estabelecidas. Os resultados obtidos foram comparados com os valores preconizados pela norma ABNT NBR 6118.

*Palavra-Chave: Resistência à compressão do concreto, evolução da resistência com a idade.*

### **Abstract**

The knowledge of the development curve of the compressive strength of concrete in the function of age, in many cases, its important in the execution of civil construction works. curing, remove formworks, prestressing services of the structure, as well as the release of other construction steps are closely related to the development and the increase of the resistance of this material over time. Therefore, theoretical expressions that make it possible to estimate the compressive strength of concrete at a given age, providing reliable results, greatly assist the dynamics of services, decision-making and planning works for reinforced and prestressed concrete structures. This paper presents an analysis of the curves of the compressive strength of several concrete strokes, based on the theoretical model proposed by the european standard. The “s” coefficients of the studied concrete strokes were determined through the linearization of the exponential expression proposed by the European standard and through the method of least squares applied to the concrete compressive strength results obtained at pre-established ages. The results obtained were compared with the values recommended by the ABNT standard.

*Keywords: Concrete compressive strength, development of strength with time.*

## 1 Histórico e Considerações Iniciais

Na década de 1890, cerca de 70 anos após o advento do cimento Portland descoberto e patenteado por Joseph Aspdin em 1824, René Féret propôs um modelo matemático para a determinação teórica da resistência de argamassas de cimento. Desde então, diversas expressões matemáticas foram estudadas e propostas de maneira a representar o comportamento da resistência à compressão de pastas, argamassas e concretos, dentre elas pode-se citar os modelos clássicos apresentados por Duff Abrams em 1918 e Trelval Powers em 1946.

O modelo proposto por Féret, relaciona a resistência à compressão de argamassas com o volume do cimento, agregados miúdos, água e vazios, de acordo com a Equação 1.1.

$$f_c = K_1 * \left( \frac{c}{c+w+v} \right)^2 \quad (\text{Equação 1.1 } ^1)$$

Conforme registrado em literaturas técnicas consagradas, incluindo publicações nacionais relevantes sobre esse tema, o mesmo *Modelo de Féret* também pode ser expresso em função das proporções volumétricas absolutas de cimento, argamassa, água e ar, como indicado na Equação 1.2.

$$f_c = K_1 * \left( \frac{C_{abs}}{1-M} \right)^2 \quad (\text{Equação 1.2 } ^2)$$

Mais tarde, em 1918, D. A. Abrams, por meio de estudos de diferentes traços de concretos plásticos e ensaios de milhares de corpos de prova notou que a resistência mecânica do concreto é inversamente proporcional à relação água/cimento, podendo ser determinada de acordo com a Equação 1.3.

$$f_c = \frac{K_2}{K_3 \cdot w/c} \quad (\text{Equação 1.3 } ^3)$$

De acordo com HELENE (1992), esse estudo se trata de uma das maiores contribuições relacionadas ao tema. Esse modelo matemático, popularmente conhecido como “*Lei de Abrams*”, se mostrou perfeitamente válido, sem necessidade de ajustes e é empregado até os dias atuais, sempre que: a quantidade de pasta de cimento é suficiente para preencher os vazios dos agregados, os agregados são de elevada resistência à compressão ( $\geq 60$  MPa), o concreto fresco seja plástico e esteja perfeitamente adensado.

<sup>1</sup> Onde:  $f_c$ : resistência à compressão;  $c$ : volume aparente de cimento;  $w$ : volume de água;  $v$ : volume de ar e  $K_1$ : constante que depende da natureza dos materiais, da idade e das condições de cura.

<sup>2</sup> Onde:  $f_c$ : resistência à compressão;  $C_{abs}$ : volume absoluto de cimento por unidade de volume de argamassa [ $C_{abs} = c / (c + a + v + s)$ ];  $c$ : volume aparente de cimento;  $a$ : volume de água;  $v$ : volume de ar;  $s$ : volume de agregado miúdo;  $M$ : volume absoluto de agregado miúdo por unidade de volume de argamassa [ $M = s / (c + a + v + s)$ ] e  $K_1$ : constante que depende da natureza dos materiais, da idade e das condições de cura.

<sup>3</sup> Onde:  $f_c$ : resistência à compressão do concreto;  $w/c$ : relação água cimento;  $K_2$  e  $K_3$ : constantes que dependem da natureza dos materiais, da idade e das condições de cura.

Para NEVILLE (2016), os modelos propostos por Féret (Equações 1.1 e 1.2) e por Abrams (Equação 1.3), apesar de estabelecidos separadamente, são similares na medida que relacionam a resistência do concreto com as quantidades de água ( $w$ ) e cimento ( $c$ ).

Na década de 1940, T. C. Powers concluiu que a porosidade ( $p$ ) é o principal parâmetro relacionado com a resistência à compressão. Dessa forma foi proposto o *Modelo de Powers*. Neste caso, a resistência à compressão é determinada por meio de uma relação denominada gel/espaco ( $g$ ), como apresentado adiante na Equação 1.4.

$$f_{cm(t)} = K_4 * g^{K_5} \quad (\text{Equação 1.4 } ^4)$$

Após essa conclusão, outros modelos que correlacionam a porosidade com a resistência de pastas, argamassas e concretos foram propostos, conforme indicado cronologicamente a seguir:

a) *Modelo de Bal'shin*, proposto em 1949.

$$\sigma = \sigma_0 * (1 - p)^{K_6} \quad (\text{Equação 1.5 } ^5)$$

b) *Modelo de Ryshkewitch*, proposto em 1953.

$$\sigma = \sigma_0 * e^{-K_7 p} \quad (\text{Equação 1.6 } ^6)$$

c) *Modelo de Hasselmann*, proposto em 1962.

$$\sigma = \sigma_0 * (1 - K_8 p) \quad (\text{Equação 1.7 } ^7)$$

d) *Modelo de Schiller*, proposto em 1971.

$$\sigma = K_9 * \ln \frac{\sigma_0}{p} \quad (\text{Equação 1.8 } ^8)$$

Vale registrar a semelhança observada entre o modelo proposto por Powers em 1946 (Equação 1.4) e por Bal'shin em 1949 (Equação 1.5). Este último é obtido a partir das

<sup>4</sup> Onde:  $f_{cm(t)}$ : resistência à compressão;  $g$ : relação gel/espaco;  $K_4$ : coeficiente que representa a resistência do cimento hidratado e  $K_5$ : coeficiente que vale de 2,5 a 3.

<sup>5</sup> Equivalente ao Modelo de Powers, onde:  $\sigma$ : tensão de ruptura da pasta com porosidade  $p$ ;  $\sigma_0$ : tensão de ruptura com porosidade zero;  $K_6$ : parâmetro experimental e  $p$ : porosidade.

<sup>6</sup> Onde:  $\sigma$ : resistência do material com porosidade  $p$ ;  $\sigma_0$ : resistência intrínseca sob porosidade zero;  $K_7$ : constante que depende do material e  $p$ : porosidade.

<sup>7</sup> Onde:  $\sigma$ : resistência do material com porosidade  $p$ ;  $\sigma_0$ : resistência intrínseca sob porosidade zero;  $K_8$ : constante que depende do material e  $p$ : porosidade.

<sup>8</sup> Onde:  $\sigma$ : resistência do material com porosidade  $p$ ;  $\sigma_0$ : resistência intrínseca sob porosidade zero;  $K_9$ : parâmetro experimental e  $p$ : porosidade.

premissas admitidas por Powers e, portanto, trata-se de uma variação do primeiro, já que a relação gel/espço ( $g$ ) representa a quantidade de fração sólida no sistema ( $g = 1 - p$ ).

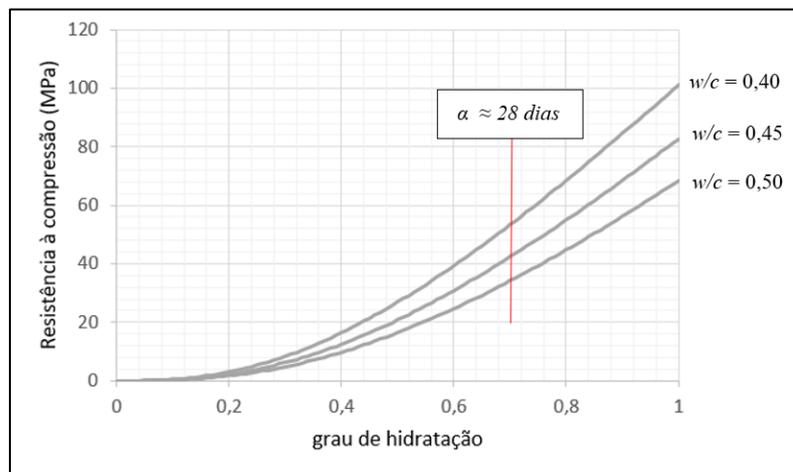
Ainda, de acordo com COUTINHO (1997) o modelo proposto por *Ryshkewitch* mostra boa correlação com baixas porosidades e o de *Schiller* com porosidades mais elevadas. No que se refere ao *Modelo de Powers* (Equação 1.4) a relação gel/espço ( $g$ ) pode ser admitida como sendo:

$$g = \frac{0,68 \cdot \alpha}{0,32 \cdot \alpha + \frac{w}{c}} \quad (\text{Equação 1.9})$$

Dessa forma, a Equação 1.4 que apresenta a resistência à compressão em função da relação gel/espço ( $g$ ), pode ser reescrita em função dos seguintes parâmetros: grau de hidratação do cimento ( $\alpha$ ) e relação água/cimento ( $w/c$ ), conforme Equação 1.10.

$$f_{cm(t)} = K_4 * \left[ \frac{0,68 \cdot \alpha}{0,32 \cdot \alpha + \frac{w}{c}} \right]^{K_5} \quad (\text{Equação 1.10}^9)$$

A Figura 1.1 apresenta graficamente o desenvolvimento da resistência à compressão do concreto de acordo com o *Modelo de Powers*, adotando  $K_4 = 120\text{MPa}$  e  $K_5 = 3$ , conforme considerado em HELENE (2005).



**Figura 1.1.** Curvas teóricas de crescimento da resistência, de acordo como *Modelo de Powers*.

Nota-se que, dentre todos os modelos mencionados até o momento, nenhum estabelece uma relação direta e explícita da evolução da resistência à compressão (de pastas, argamassas ou concretos de cimento Portland) em função do tempo. Dentre eles, apenas o *Modelo de Powers* considera essa variável de forma implícita, por meio do grau de hidratação do cimento Portland ( $\alpha$ ). Sabe-se que esta evolui com o tempo, tendo aos 28

<sup>9</sup> Onde:  $f_{cm(t)}$ : resistência à compressão em uma determinada idade;  $\alpha$ : grau de hidratação do cimento (varia de 0 para concretos recém misturados a 1 para condições ideais de cura, após tempo infinito);  $K_4$  e  $K_5$ : constantes que dependem dos materiais;  $w/c$ : relação água/cimento em massa (caso houver vazios devido ao ar aprisionado, estes devem ser somados em volume à massa de água).

dias de cura, de maneira geral, um grau de hidratação da ordem de  $\alpha = 0,70$ , dependente da temperatura ambiente, da finura do cimento, assim como de sua composição química.

Entretanto, é imperativo salientar que o grau de hidratação ( $\alpha$ ), não possui uma relação linear com a idade, pois a hidratação do cimento Portland ocorre em uma taxa muito mais acelerada nas primeiras idades, quando comparada a idades mais avançadas. Portanto, estabelecer uma relação entre o grau de hidratação do cimento ( $\alpha$ ) e a idade do concreto, não é uma tarefa simples, pois depende de inúmeros fatores, tais como: características físicas e químicas do material, finura do cimento, temperatura de cura, disponibilidade de água para hidratação do cimento anidro, relação  $w/c$  do traço etc.

Vale registrar que em diversos tipos de análises e verificações estruturais faz-se necessário o conhecimento prévio da resistência à compressão do concreto em uma (ou mais) idades pré-estabelecidas. Daí a importância de se conhecer curvas mais precisas de crescimento da resistência em função do tempo. Nesse contexto, atualmente, dois modelos teóricos se destacam:

a) modelo utilizado pela norma americana *ACI - American Concrete Institute, Committee 209*:

$$f_{cm(t)} = \left( \frac{t}{a+bt} \right) * f_{cm(28)} \quad (\text{Equação 1.11 }^{10})$$

b) modelo utilizado pela norma europeia *fib Model Code*. Ressalta-se que este modelo, considerado como referência neste artigo e detalhado adiante no item 2, também foi adotado pela norma brasileira e consta na ABNT NBR 6118:2014 “*Projeto de estruturas de concreto – Procedimento*”.

Como registro histórico, convém mencionar outro modelo teórico, considerado pela norma ABNT NBR 7197:1989 “*Projeto de estruturas de concreto protendido*”, cancelada em 31/03/2004, em seu item 7 “*Fluência, retração e relaxação*”. Esta norma apresentava uma expressão para o desenvolvimento da resistência à compressão do concreto em função da idade ( $t$ ):

$$f_{cm(t)} = \frac{9*t*(t+42)}{(9*t+40)*(t+61)} * f_{cm(\infty)} \quad (\text{Equação 1.12})$$

Essa mesma expressão também pode ser apresentada em função da resistência média aos 28 dias de idade ( $f_{cm(28)}$ ), ou seja, no mesmo formato das expressões apresentadas nos modelos *ACI* e *fib Model Code*. Para tanto, substitui-se  $t = 28$  dias na Equação 1.12.

$$f_{cm(28)} = \frac{9*28*(28+42)}{(9*28+40)*(28+61)} * f_{cm(\infty)} \rightarrow f_{cm(\infty)} = 1,473 * f_{cm(28)}$$

Dessa maneira, comuta-se  $f_{cm(\infty)} = 1,473 * f_{cm(28)}$  na Equação 1.12 e obtém-se:

<sup>10</sup> Onde:  $f_{cm}(t)$ : resistência média à compressão na idade  $t$  (MPa ou psi);  $f_{cm(28)}$ : resistência média à compressão aos 28 dias (MPa ou psi);  $t$ : tempo (dias);  $a$ : coeficiente que pode variar de 0,05 a 9,25 (dias) e  $b$ : coeficiente que pode variar de 0,67 a 0,98 (adimensional).

$$f_{cm(t)} = \frac{13,259 * t * (t+42)}{(9 * t + 40) * (t+61)} * f_{cm(28)} \quad (\text{Equação 1.13})$$

Nota-se que a expressão proposta pela antiga norma brasileira de projeto de estruturas de concreto protendido (Equações 1.12 e 1.13) era bastante simplificada, pois não considerava nenhum outro parâmetro, além do tempo ( $t$ ). Por exemplo, não era levado em consideração o tipo de cimento ou cura utilizados.

## 2 Apresentação e Análise do Modelo Proposto pelo *fib* Model Code

O *fib* Model Code for Concrete Structures 2010 em seu item 5.1 “Concrete” recomenda a utilização de uma expressão em formato exponencial para representar o crescimento da resistência à compressão do concreto em função do tempo. Essa expressão leva em consideração um coeficiente  $s$ , que varia de acordo com o tipo e a classe de resistência do cimento utilizado. A expressão recomendada pela norma europeia, é dada por:

$$f_{cm(t)} = e^s \left[ 1 - \sqrt{\frac{28}{t}} \right] * f_{cm(28)} \quad \text{Equação 2.1}^{11}$$

A Tabela 2.1 apresenta os valores recomendados para o coeficiente  $s$ , conforme subitem 5.1.9.1 “Development of strength with time” da referida norma europeia.

**Tabela 2.1** – Valores recomendados para o coeficiente  $s$ , para diferentes classes de resistência e tipo de cimento, N: ordinary early strenght or normal e R: high early strenght or rapid, conforme *fib* Model Code.

Classe de Resistência do Cimento*	32,5 N	32,5 R 42,5 N	42,5 R 52,5 N 52,5 R
Coefficiente $s$	0,38	0,25	0,20

(\*) conforme item 7 “Mechanical, physical, chemical and durability requeriments” da norma EN 197-1:2011 “Cement. Composition, specifications and conformity criteria for common cements”.

Ou seja, o coeficiente  $s$  assume valores de 0,20, 0,25 e 0,38 que levam em consideração além do tipo de cimento (R ou N, alta resistência inicial ou não, respectivamente), sua classe de resistência (32,5, 42,5 ou 52,5). A Figura 2.1 apresenta as curvas plotadas para os 3(três) diferentes valores do coeficiente  $s$  recomendados, considerando a razão  $f_{cm(t)}/f_{cm(28)}$  no eixo das ordenadas.

Vale registrar que a norma ABNT NBR 6118:2014 “Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento” em seu item 12 “Resistências” utiliza a mesma equação proposta pelo *fib* Model Code adotando para o coeficiente  $s$  os valores de 0,20 para cimento tipo CP V-ARI; 0,25 para cimentos tipo CP I e II e 0,38 para cimentos tipo CP III e IV. Entretanto, a referida norma brasileira não leva em conta as classes de resistência do cimento.

<sup>11</sup> Onde:  $f_{cm(t)}$ : resistência à compressão média na idade de  $t$ ;  $f_{cm(28)}$ : resistência à compressão média aos 28 dias;  $t$ : tempo (dias) e  $s$ : coeficiente que depende do tipo de cimento e de sua classe de resistência.

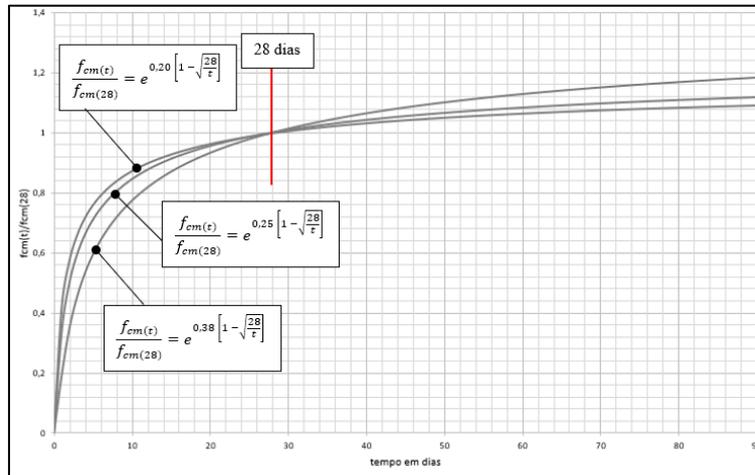


Figura 2.1. Curvas de crescimento de resistência à compressão, conforme **fib Model Code**.

Pode-se ainda representar o modelo proposto pelo **fib Model Code** por meio de uma expressão mais “elegante” (Equação 2.2), desenvolvida a partir da Equação 2.1, como detalhado adiante:

$$f_{cm}(t) = e^s \left[1 - \sqrt{\frac{28}{t}}\right] * f_{cm}(28) \rightarrow \frac{f_{cm}(t)}{f_{cm}(28)} = e^s * e^{-s \sqrt{\frac{28}{t}}}$$

$$\frac{f_{cm}(t)}{f_{cm}(28)} = \frac{e^s}{e^{s \sqrt{28} * \frac{1}{\sqrt{t}}}}$$

Na expressão anterior, substituindo  $e^s$  por um coeficiente  $r$  e  $e^{-s \sqrt{28}}$  por um coeficiente  $v$ , obtém-se a Equação 2.2.

$$f_{cm}(t) = \frac{r}{v^{1/\sqrt{t}}} * f_{cm}(28) \quad (\text{Equação 2.2})$$

A Tabela 2.2 apresenta os coeficientes  $r$  e  $v$  ajustados a partir dos valores recomendados para o coeficiente  $s$ , conforme proposto pelo **fib Model Code**.

**Tabela 2.2** – Valores dos coeficientes  $r$  e  $v$ , obtidos a partir do coeficiente  $s$ , proposto pelo **fib Model Code**.

Coefficiente $s$	0,20	0,25	0,38
Coefficiente $r$	1,22	1,28	1,46
Coefficiente $v$	2,86	3,69	7,41

De maneira a respeitar os limites estabelecidos pelo **fib Model Code** para o coeficiente  $s$  (0,20 a 0,38), os coeficientes  $r$  e  $v$  devem assumir os seguintes valores:  $1,22 \leq r \leq 1,46$  e  $2,86 \leq v \leq 7,41$ .

É interessante notar que nesse caso há uma correlação de interdependência entre os coeficientes  $r$  e  $v$ , dada pela expressão  $v = r \sqrt{28}$ . A Figura 2.2 apresenta graficamente a correlação existente e o intervalo compreendido entre os limites mencionados no parágrafo anterior.

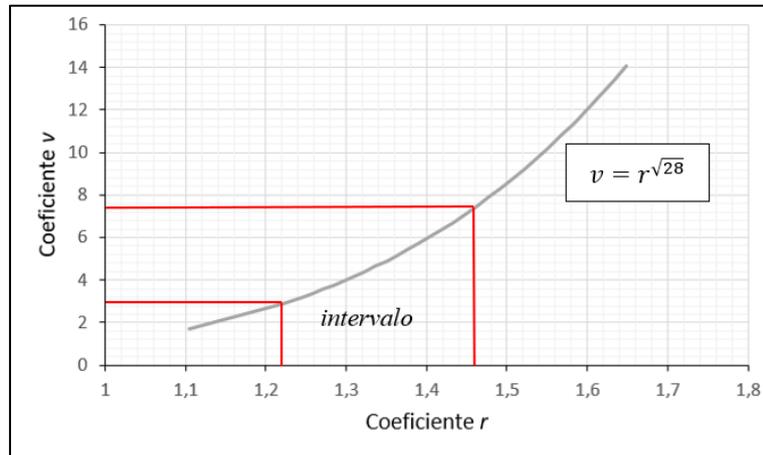


Figura 2.2. Correlação entre os coeficientes r e v.

Como registro vale apontar que a Equação 2.2 (reescrita a partir da expressão proposta pelo **fib** Model Code) é a mesma expressão largamente empregada por HELENE (1992) no capítulo 3.5 “Evolução da Resistência à Compressão com a Idade” no livro “Manual de Dosagem e Controle do Concreto”. Ou seja, o estudo apresentado nessa literatura consagrada pode ter sido tomado como referência para o modelo proposto pela norma europeia que é posterior ao livro.

Ainda, substituindo  $e^s$  por r na Equação 2.1, ou ainda sabendo que existe uma interdependência entre os coeficientes r e v (como apresentado na Figura 2.2), obtém-se:

$$f_{cm(t)} = r \left(1 - \sqrt{\frac{28}{t}}\right) * f_{cm(28)} \quad (\text{Equação 2.3})$$

Dessa forma, as expressões propostas pelo **fib** Model Code (evidenciadas na Figura 2.1) podem ser reescritas conforme apresentado na Tabela 2.3.

Tabela 2.3 – Equivalência entre as expressões propostas pelo **fib** Model Code.

Expressão apresentada no <b>fib</b> Model Code	Expressões reescritas, por meio de coeficientes ajustados	
$f_{cm(t)} = e^s \left[1 - \sqrt{\frac{28}{t}}\right] * f_{cm(28)}$	$f_{cm(t)} = \frac{r}{v^{1/\sqrt{t}}} * f_{cm(28)}$	$f_{cm(t)} = r \left(1 - \sqrt{\frac{28}{t}}\right) * f_{cm(28)}$
$f_{cm(t)} = e^{0,2} \left[1 - \sqrt{\frac{28}{t}}\right] * f_{cm(28)}$	$f_{cm(t)} = \frac{1,22}{2,86^{1/\sqrt{t}}} * f_{cm(28)}$	$f_{cm(t)} = 1,22 \left(1 - \sqrt{\frac{28}{t}}\right) * f_{cm(28)}$
$f_{cm(t)} = e^{0,25} \left[1 - \sqrt{\frac{28}{t}}\right] * f_{cm(28)}$	$f_{cm(t)} = \frac{1,28}{3,69^{1/\sqrt{t}}} * f_{cm(28)}$	$f_{cm(t)} = 1,28 \left(1 - \sqrt{\frac{28}{t}}\right) * f_{cm(28)}$
$f_{cm(t)} = e^{0,38} \left[1 - \sqrt{\frac{28}{t}}\right] * f_{cm(28)}$	$f_{cm(t)} = \frac{1,46}{7,41^{1/\sqrt{t}}} * f_{cm(28)}$	$f_{cm(t)} = 1,46 \left(1 - \sqrt{\frac{28}{t}}\right) * f_{cm(28)}$

Aplicando os conceitos de limite a partir da Equação 2.1, observa-se o comportamento do modelo europeu em um tempo muito longo ( $f_{cm(\infty)}$ ), conforme indicado na Equação 2.4.

$$f_{cm(\infty)} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{s \left[ 1 - \sqrt{\frac{28}{t}} \right]} * f_{cm(28)} \rightarrow f_{cm(\infty)} = e^{s[1-\sqrt{0}]} * f_{cm(28)}$$

$$f_{cm(\infty)} = e^s * f_{cm(28)} \quad (\text{Equação 2.4})$$

Ou seja, quanto maior o valor do coeficiente  $s$ , maior será a resistência final do concreto. Para  $s = 0,20$  temos uma resistência final 22% superior à resistência aos 28 dias de idade ( $f_{cm(\infty)} = 1,22 * f_{cm(28)}$ ). Para  $s = 0,38$  temos um crescimento de 46% a partir da resistência aos 28 dias de idade ( $f_{cm(\infty)} = 1,46 * f_{cm(28)}$ ).

A norma brasileira ABNT NBR 6118:2014 “Projeto de estruturas de concreto – Procedimento” em seu item 12.3.3 “Resistência de cálculo do concreto” estabelece que esse modelo teórico deve ser usado somente em verificações realizadas em datas inferiores aos 28 dias de idade, sem contudo justificar as razões científicas dessa restrição.

Por meio da análise da Equação 2.3, é possível observar que, quanto maior o valor do coeficiente  $r$  (lembrando que  $r = e^s$ ), menor é a velocidade de crescimento da resistência à compressão do concreto nas primeiras idades. Essa constatação pode ser observada graficamente na Figura 2.3.

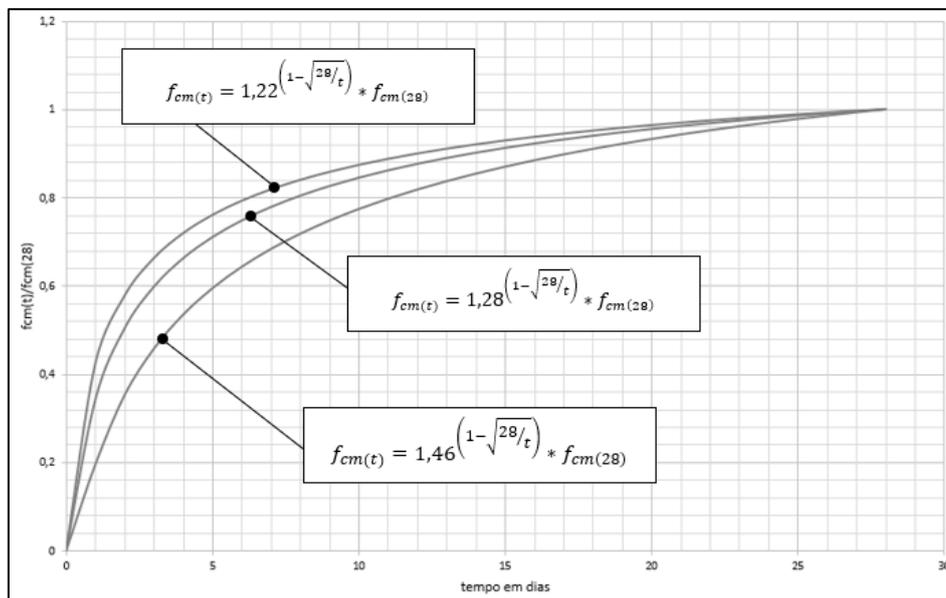


Figura 2.3. Curvas teóricas de evolução da resistência à compressão do concreto conforme Equação 2.4

Por fim, considerando o modelo proposto pelo **fib** Model Code, também é possível encontrar a resistência à compressão média do concreto em uma determinada idade, tendo como referência a resistência última ( $f_{cm(\infty)}$ ). Para tanto, devem ser utilizadas as Expressões 2.1 e 2.4 resultando em:

$$f_{cm(t)} = \frac{1}{e^{s \sqrt{\frac{28}{t}}}} * f_{cm(\infty)} \quad (\text{Equação 2.5})$$

### 3 Representação Linear da Expressão Proposta pelo *fib* Model Code

Para facilitar a determinação dos coeficientes de crescimento de resistência à compressão do concreto (coeficiente  $s$ ), à luz da norma europeia, como proposto nesse artigo, faz-se necessário que a expressão preconizada pelo *fib* Model Code (Equação 2.1) seja transformada e apresentada em formato linear:  $y = Ax + B$ .

Logo, para obtenção da referida expressão linearizada (Equação 3.1), foram efetuadas algumas operações matemáticas, como detalhado adiante:

$$f_{cm(t)} = e^s \left[ 1 - \sqrt{\frac{28}{t}} \right] * f_{cm(28)} \rightarrow \frac{f_{cm(t)}}{f_{cm(28)}} = e^s \left[ 1 - \sqrt{\frac{28}{t}} \right] \rightarrow \ln \frac{f_{cm(t)}}{f_{cm(28)}} = \ln e^s \left[ 1 - \sqrt{\frac{28}{t}} \right]$$

$$\ln \frac{f_{cm(t)}}{f_{cm(28)}} = \sqrt{28} * s \left( -\frac{1}{\sqrt{t}} \right) + s \quad \text{(Equação 3.1)}$$

Nota-se, na expressão anterior, que ambos os coeficientes obtidos [angular ( $A = \sqrt{28} * s$ ) e linear ( $B = s$ )] estão relacionados com o parâmetro de desenvolvimento da resistência à compressão do concreto (parâmetro  $s$ ).

A Figura 3.1 representa graficamente a expressão linearizada, para os valores usuais recomendados pelo *fib* Model Code ( $s = 0,2$ ;  $s = 0,25$  e  $s = 0,38$ ).

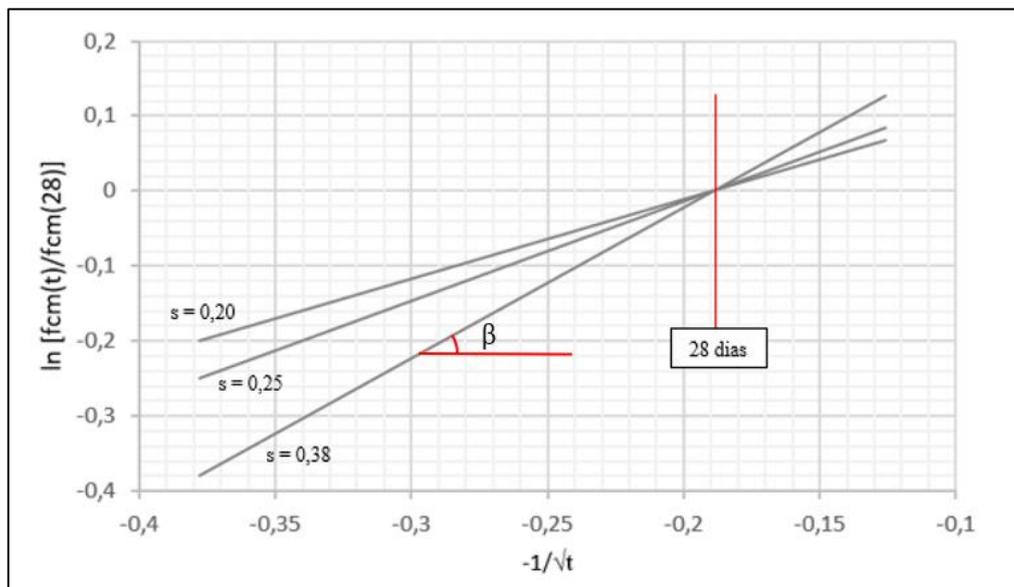


Figura 3.1. Representação linear das curvas de crescimento de resistência à compressão propostas pelo *fib* Model Code, conforme Equação 2.1.

Na figura anterior, a idade de 28 dias está representada no eixo das abscissas pelo valor  $-\frac{1}{\sqrt{28}} = -0,199$ . A resistência à compressão aos 28 dias de idade está indicada no eixo

das ordenadas e, em todos os casos, independentemente do coeficiente  $s$  considerado, com valor igual a 0, pois  $\ln \frac{f_{cm(28)}}{f_{cm(28)}} = \ln 1 = 0$ .

Portanto, no caso da expressão linearizada, é intuitivo observar que a inclinação das retas ( $\beta$ ) varia de acordo com o parâmetro de crescimento de resistência ( $s$ ) e que todas as retas possuem o par ordenado  $(-0,189; 0)$  em comum, para qualquer valor do coeficiente  $s$ .

#### 4 Metodologia de Análise

Para elaboração deste artigo foram consideradas 1136 amostras oriundas de obras reais, analisadas de acordo com as diferentes famílias de traços de concreto. Cada amostra é composta por 3 exemplares ensaiados aos 7, 28 e 63 dias de idade ( $f_{c(7)}$ ,  $f_{c(28)}$  e  $f_{c(63)}$ ).

Os resultados analisados foram obtidos por meio de ensaios de ruptura de corpos de prova cilíndricos (100 x 200mm), realizados de acordo com a norma ABNT NBR 5739:2018 “Concreto: Ensaio de compressão de corpos de prova cilíndricos”, por laboratório acreditado pelo INMETRO e por profissionais capacitados pelo Núcleo de Qualificação e Certificação de Pessoal (NQCP) do IBRACON.

Além disso, com a finalidade de avaliar a uniformidade e qualidade das operações de ensaio e controle, todos os resultados foram previamente submetidos a uma avaliação estatística de desempenho de ensaio, conforme Anexo B (informativo) da NBR 5739:2018 e ACI 214R-11 “Guide to Evaluation of Strength Test Results of Concrete”. Para todos os casos, obteve-se um padrão de controle muito bom (nível 2) ou excelente (nível 1).

Após essas verificações preliminares, determinou-se, para cada uma das milhares de amostras analisadas, a média da resistência à compressão dentre os resultados obtidos na ruptura dos corpos de prova irmãos. Dessa forma, para cada amostra analisada foram obtidos apenas 3 resultados de resistência à compressão distintos, um para cada idade: 7, 28 e 63 dias ( $f_{cm(7)}$ ,  $f_{cm(28)}$  e  $f_{cm(63)}$ ).

Na sequência, esses 3 resultados foram divididos individualmente pela resistência média aos 28 dias ( $f_{cm(28)}$ ). A esses valores foi aplicado o logaritmo neperiano (ou natural), a fim de compatibilização com a expressão linearizada.

A Tabela 4.1 exemplifica a metodologia adotada e descrita anteriormente para apenas 1(uma) amostra de concreto com resistência à compressão especificada em projeto de 45MPa ( $f_{ck} \geq 45\text{MPa}$ ), produzido com cimento Portland de alto forno, classe de resistência 40, ou seja, tipo CP III 40.

De posse do valor do algoritmo natural e da respectiva idade  $t$  foi possível determinar os 3 pares ordenados, dados por:  $(-\frac{1}{\sqrt{t}}; \ln \frac{f_{cm(t)}}{f_{cm(28)}})$  aos 7, 28 e 63 dias. Ou seja, para o exemplo apresentado na Tabela 4.1, tem-se:  $(-0,378; -0,341)$ ,  $(-0,189; 0)$  e  $(-0,126; 0,128)$ .

**Tabela 4.1** – Exemplo quantitativo da metodologia adotada, considerando apenas 1(uma) amostra coletada de um lote produzido com cimento tipo CPIII 40.

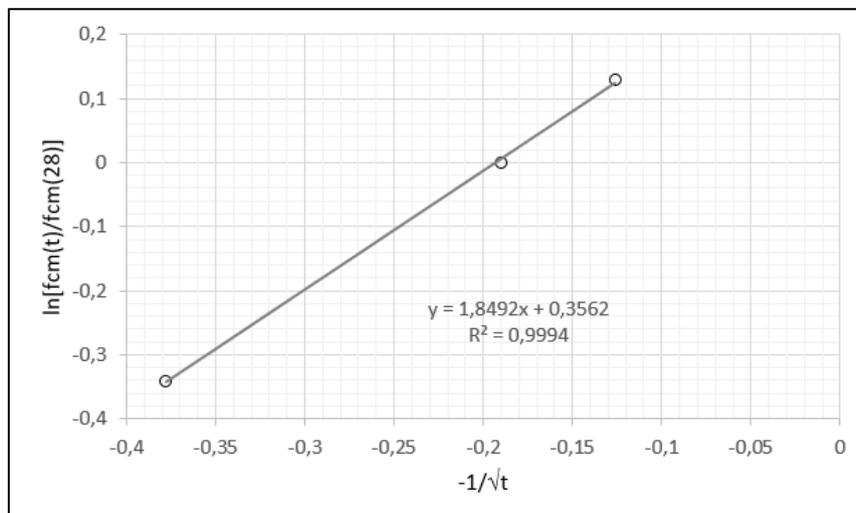
Notação Termo	$f_{ck}$ (MPa)	$f_c(t)$ (MPa)*			$f_{cm}(t)$ (MPa)**			$\frac{f_{cm}(t)}{f_{cm}(28)}$ (adimensional)			$\ln \frac{f_{cm}(t)}{f_{cm}(28)}$ (adimensional)		
		$f_{c(7)}$	$f_{c(28)}$	$f_{c(63)}$	$f_{cm(7)}$	$f_{cm(28)}$	$f_{cm(63)}$	$\frac{f_{cm(7)}}{f_{cm(28)}}$	$\frac{f_{cm(28)}}{f_{cm(28)}}$	$\frac{f_{cm(63)}}{f_{cm(28)}}$	$\ln \frac{f_{cm(7)}}{f_{cm(28)}}$	$\ln \frac{f_{cm(28)}}{f_{cm(28)}}$	$\ln \frac{f_{cm(63)}}{f_{cm(28)}}$
Amostra***	45	37,4	52,1	59,8	37,4	52,6	59,8	0,711	1,000	1,137	-0,341	0	0,128
		-	53,1	-									

(\*) valores de resistência à compressão obtidos, conforme relatórios de ensaio disponibilizados pelo laboratório técnico responsável pelo controle tecnológico do concreto, acreditado pelo INMETRO;

(\*\*) valor médio de resistência à compressão, no caso da moldagem de apenas 1(um) corpo de prova em uma determinada idade, o único valor de resistência à compressão obtido foi considerado como valor médio, neste caso: 7 e 63 dias de idade;

(\*\*\*) escolhida aleatoriamente dentre milhares de amostras de lotes produzidos com cimento tipo CPIII, a título de exemplo.

Os pares ordenados mencionados no parágrafo anterior foram então lançados em um gráfico específico, obtido de acordo com a expressão linearizada do modelo proposto pelo **fib** Model Code, conforme detalhado no item 3 “*Representação Linear da Expressão Proposta pelo fib Model Code*” deste artigo. Em seguida, por regressão linear pelo método dos mínimos quadrados, foi obtida a reta média e sua respectiva equação linear, conforme apresentado no gráfico da Figura 4.1.



**Figura 4.1.** Exemplo da representação linear da curva de crescimento de resistência à compressão da amostra apresentada na Tabela 4.1, conforme modelo proposto pelo **fib** Model Code.

Nota-se, na figura anterior, que os eixos das abscissas e ordenadas foram adequados à expressão linearizada obtida.

Como a equação da reta média obtida é dada por  $y = 1,8492x + 0,3562$  e a expressão linearizada do modelo europeu é dada por  $\ln \frac{f_{cm}(t)}{f_{cm(28)}} = \sqrt{28} * s \left( -\frac{1}{\sqrt{t}} \right) + s$ , para o exemplo em questão, o parâmetro  $s$  pode ser obtido de duas maneiras:

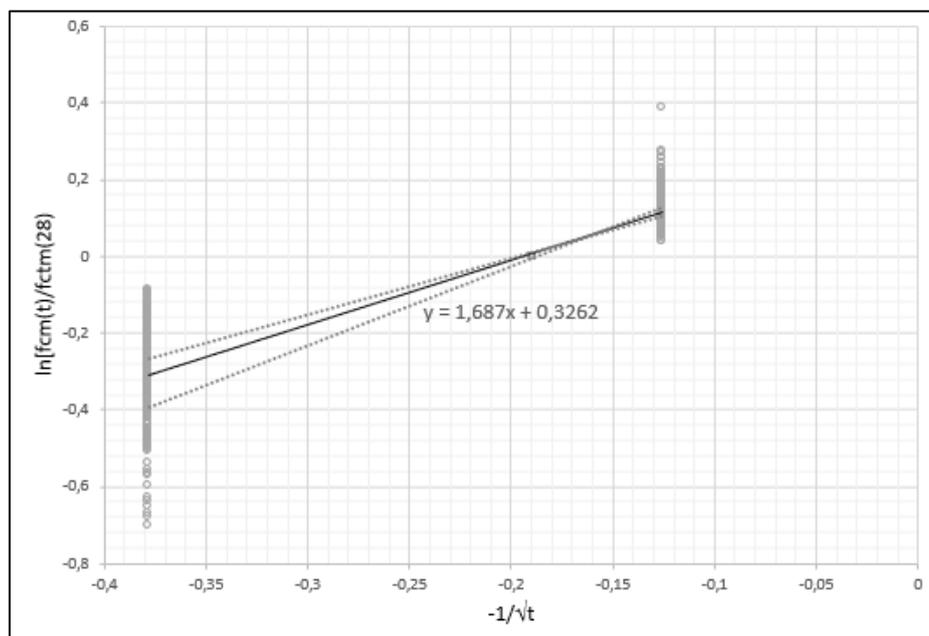
- ✓ obtido diretamente por meio do coeficiente linear da equação:  $s = 0,3562 \approx 0,356$ ;
- ✓ obtido a partir do coeficiente angular da equação:  $\sqrt{28} * s = 1,8492 \rightarrow s \approx 0,350$ .

Na opinião dos autores, a determinação do parâmetro  $s$ , por meio do coeficiente angular ( $\sqrt{28} * s$ ) é mais adequada, uma vez que este é a representação da inclinação da reta. Apesar de que, em ambos os casos, os valores obtidos sempre são bem próximos, como não poderia deixar de ser.

O próximo passo envolveu a análise de um número maior de amostras, considerando, evidentemente, sempre uma mesma família de traço de concreto, de maneira a se obter um valor para o coeficiente  $s$  mais representativo do traço estudado.

Ainda como exemplo, o gráfico da Figura 4.2 apresenta a reta média obtida por meio da análise de centenas de amostras de um concreto  $f_{ck} \geq 40$  MPa, produzido com cimento tipo CP III 40, relação  $w/c = 0,45$ .

Dessa maneira tornou-se possível encontrar o coeficiente  $s$ , que representa o desenvolvimento da resistência à compressão do concreto ao longo do tempo. Nota-se que o resultado obtido, nesse caso específico, foi de  $s = 0,32$ , para um traço de concreto produzido com cimento nacional tipo CP III 40.



**Figura 4.2.** Representação linear do crescimento da resistência à compressão de um traço de concreto produzido com cimento nacional tipo CP III 40, conforme modelo proposto pelo *fib* Model Code.

Na Fig. 4.2 também é possível observar, por meio das linhas pontilhadas, o intervalo de confiança correspondente a 99%. Nota-se que as inclinações das retas assumem valores relativamente próximos. Tal fato corrobora com a validade da metodologia adotada para a determinação do coeficiente  $s$ .

## 5 Estudo de Caso e Apresentação dos Resultados

Por meio da metodologia apresentada no item anterior, determinou-se o coeficiente  $s$  de diferentes traços de concretos produzidos com cimentos tipo CP III 40 e CP V - ARI, para traços de relação  $w/c$  de 0,50, 0,45 e 0,40, conforme detalhado na Tabela 5.1.

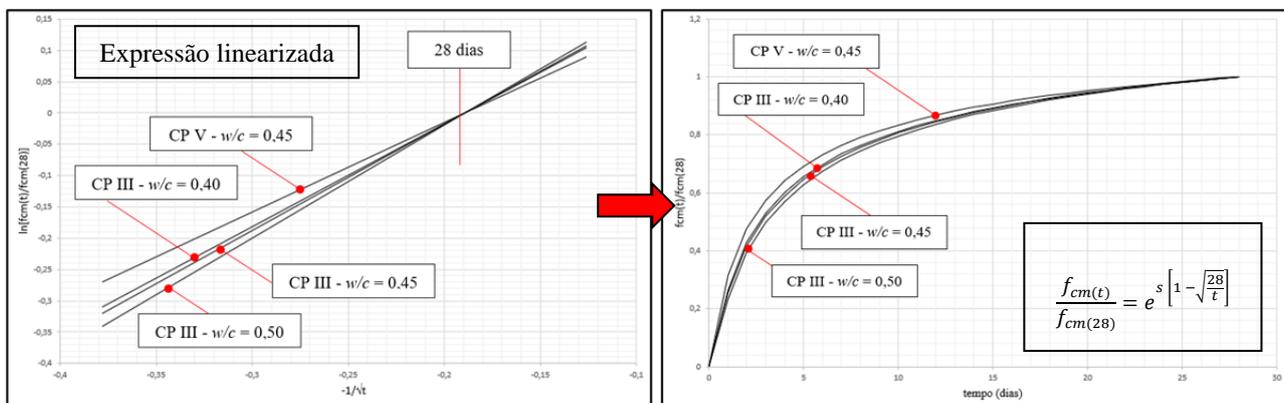
**Tabela 5.1** – Características dos traços de concreto analisados. Tabela resumo.

Traço número	Quantidade de amostras analisadas	Características do traço de Concreto					Coeficiente “s” obtido
		$f_{ck}$ (MPa)	Abatimento** (mm)	Tipo de cimento	Consumo de cimento (kg/m <sup>3</sup> )	Relação água cimento (w/c)	
01	153	35	160+/-30	CP III 40	360	0,50	0,34
02*	308	40	100+/-20	CP III 40	400	0,45	0,32
03	175	45	120+/-20	CP III 40	452	0,40	0,31
04	500	40	100+/-20	CP V ARI	409	0,45	0,27

(\*) conforme gráfico apresentado na Figura 4.2;

(\*\*) Registra-se que, de acordo com norma ABNT NBR 8953:2015, o abatimento define a classe de consistência do concreto, que pode ser: S10, S50, S100, S160 ou S220.

A Fig. 4.3 apresenta graficamente os coeficientes  $s$  obtidos para cada um dos diferentes traços de concreto indicados na tabela anterior, considerando suas classes de resistência e relações água/cimento ( $w/c$ ). A referida figura apresenta o modelo linearizado (à esquerda) e a curva correspondente para as idades de 0 a 28 dias (à direita), de acordo com a expressão proposta pelo modelo **fib** Model Code.



**Figura 5.1.** Representação linear do crescimento da resistência à compressão do concreto em função do tipo de cimento e da relação  $w/c$  (à esquerda) e representação da curva de crescimento correspondente, conforme modelo **fib** Model Code (à direita).

## 6 Conclusões

Com base nos resultados obtidos, observou-se que o coeficiente  $s$  de crescimento da resistência à compressão do concreto, além de variar com o tipo de cimento utilizado, também varia de acordo com a relação água cimento ( $w/c$ ) do traço, conforme já anunciava Helene em seu livro de 1992. Nesse aspecto, notou-se que, para um mesmo tipo de cimento (CP III), o coeficiente  $s$  é ligeiramente menor, quanto menor for a relação  $w/c$ . Essa constatação pode ser observada quantitativamente na Tabela 5.1 e graficamente na Figura 5.1.



Anais do  
62º Congresso Brasileiro do Concreto  
CBC2020  
Setembro / 2020



@ 2020 - IBRACON - ISSN 2175-8182

Além disso, para o caso do cimento tipo CP III, observou-se nesse estudo que os valores obtidos para o coeficiente  $s$  (0,31, 0,32 e 0,34) são um pouco menores que o preconizado pela norma ABNT ( $s = 0,38$ ). Isso indica que o crescimento da resistência à compressão dos traços produzidos com cimento tipo CP III aqui estudados foi um pouco mais acelerado que o esperado, quando da utilização do coeficiente preconizado pela norma nacional.

Uma possível explicação para esse fato pode estar relacionada com o teor de adição de escória granulada de alto forno no cimento tipo CP III. Ressalta-se que a norma ABNT NBR 16697:2018 "*Cimento Portland – Requisitos*" admite como limites, uma porcentagem de escória (em massa) variando de 35 a 75% na composição de cimento.

No que se refere ao concreto produzido com cimento tipo CP V - ARI o coeficiente  $s$  de crescimento obtido ( $s = 0,27$ ) foi superior ao preconizado pela norma nacional ( $s = 0,20$ ). Isso indica que o crescimento da resistência foi um pouco mais lento que o esperado. Isso pode estar relacionado com o módulo de finura do cimento ou ainda com os teores de silicatos dicálcico e tricálcico ( $C_2S$  e  $C_3S$ , respectivamente), principais compostos do cimento responsáveis pela resistência nas primeiras idades.

Por fim, é importante registrar que a metodologia para determinação do coeficiente  $s$  apresentada neste artigo pode ser adotada para qualquer traço de concreto de cimento Portland, desde que respeitadas as premissas da norma europeia. Esta mesma metodologia, com algumas adaptações, também pode se estender a outros modelos teóricos, como o proposto pelo ACI, por exemplo.

## 7 Referências

ACI 209.2R-08. **Guide for Modeling and Calculating Shrinkage and Creep in Hardened Concrete**. American Concrete Institute. 2008. 44p.

ACI 214R-11. **Guide to Evaluation of Strength test Results of Concrete**. American Concrete Institute. 2011. 16p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS **NBR 5739: Concreto: Ensaio de compressão de corpos de prova cilíndricos**. Rio de Janeiro 2018. 9p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento**. Rio de Janeiro 2014. 238p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS **NBR 7197: Projeto de estruturas de concreto protendido**. Rio de Janeiro 1989. 71p.

CARVALHO, R. C. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**. São Carlos, EdUFSCar, 2013.

COUTINHO, A. S. **Fabrico e propriedades do betão**. Laboratório Nacional de Engenharia Civil. Lisboa 1997. 3v.



Anais do  
62º Congresso Brasileiro do Concreto  
CBC2020  
Setembro / 2020



@ 2020 - IBRACON - ISSN 2175-8182

**fib** Bulletin 55. **Model Code for Concrete Structures**. 2010. 292p.

HELENE, P. R. L.; TERZIAN, P. **Manual de dosagem e controle do concreto**. Pini. Brasília, 1992.

HELENE, P. R. L. **Capítulo 15. Dosagem dos concretos de cimento Portland. Concreto: Ensino, Pesquisa e Realizações**. IBRACON 1ª edição. São Paulo, 2005. 2v.

NEVILLE, A. M. **Propriedades do concreto**. Bookman 5ª edição. Porto Alegre 2016.

NEVILLE, A. M.; BROOKS, J.J. **Tecnologia do concreto**. Bookman 2ª edição. Porto Alegre 2013.

TAYLOR, H. F. W. **Cement Chemistry**. Academic Press. San Diego 1990.

TUTIKIAN, B. F.; ANDRADE J. J. O. **Capítulo 17. Resistência mecânica do concreto. Concreto: Ciência e tecnologia**. IBRACON 1ª edição. São Paulo, 2011. 2v.